Малыши и математика

Домашний кружок для дошкольников

Александр Звонкин

Издательство Московского центра непрерывного математического образования

Москва 2006

Автор этой книги Александр Звонкин — математик, профессор университета в Бордо (Франция). В ту пору, когда он ещё жил в Москве, а его дети были маленькими, он в течение нескольких лет вёл домашний математический кружок для дошкольников. Самому младшему из участников кружка (сыну автора) в тот момент, когда началась эта история, не было ещё и четырёх лет. Вот об этом несколько необычном опыте автор и рассказывает в своей книге. Жанр книги трудно определить. Дневниковые записи здесь то и дело перемежаются рассуждениями о математике, о психологии или же о природе способностей; задачник превращается в мемуары, а мемуары — в заметки о школе; а порой уморительно смешные наблюдения за детьми и за их реакцией на происходящее трансформируются в новые идеи и новые математические задачи.

Книга будет интересна родителям дошкольников (а также их бабушкам и дедушкам), воспитателям детских садов, учителям начальных классов, и вообще всем тем, кого интересует процесс развития детского интеллекта.

Оглавление

Несколько предварительных замечаний

Родительский дневник

Среди многочисленных окололитературных жанров существует и такой: родительский дневник. Дети растут, с ними много всякого происходит, а родители всё это аккуратно заносят в тетрадочку. Потом, через много лет, эти тетрадочки оказываются просто-таки захватывающим чтением. Особенно для самих родителей. Ещё бы — ведь это про своих собственных детей, да еще в таком умилительном возрасте. И, опосредованно, о своей молодости.

Часто ли вам, уважаемый читатель, приходилось разглядывать фотографии маленьких детей — не своих, а чужих? Приходят гости, вытаскивают стопку фотографий, и начинается... Вы уже на втором десятке с трудом подавляете зевоту, а они готовы длить это действо до бесконечности. Всё, что касается *их* детей или внуков, кажется им неотразимо интересным; а вас преследует только одна мысль: ну до чего же все младенцы похожи друг на друга!

Вот и я сейчас, как говорится, «представляя эту книгу на суд читателя», испытываю весьма смешанные чувства. Я хотел бы, но никак не могу войти в положение стороннего и объективного наблюдателя. Алла Ярхо, моя жена, вообще говоря, является очень строгим и придирчивым критиком. Но каждый раз, беря в руки этот текст, она его в очередной раз перечитывает — и не может оторваться. Вся столь привычная нам ирония куда-то отступает и вытесняется совсем другими эмоциями.

Эта книжка — про наших детей. У нас их двое — сын Дима и дочь Женя. Об их детских годах здесь и рассказывается; ну, и, разумеется, об их друзьях тоже — ведь не жили же они в колбе. Хотя невозможно отрицать, что мы были гораздо более внимательными и наблюдательными, когда дело касалось именно наших детей, а не чужих.

Перед автором возникает суровый вопрос: что интересного найдет для себя в этой книге посторонний читатель? Почему она должна быть интересна не только нашей семье, но и чужим людям?

По идее ответ таков: эта книга — не «просто дневник», а *дневник математического кружка*. Когда Диме исполнилось 3 года и 10 месяцев, я собрал четверых ребят примерно того же возраста, что и он, или чуть постарше, его приятелей по двору, и начал вести с ними математический кружок. Вот об этом довольно необычном опыте здесь и рассказано. Если угодно, эту книжку можно воспринимать и как своего рода *задачник по математике для дошкольников*. С той особенностью, что, кроме самих задач, здесь рассказывается еще и о том, как дети на эти задачи реагировали, что понимали, что нет, какие у нас с ними возникали трудности и недоразумения.

Пожалуй, если бы какой-нибудь автор написал сборник задач по самой обыкновенной геометрии или алгебре, но при этом еще превратил бы каждую задачу в живую историю о том, как он и его ученики с этой задачей «сражались» — что ж, такая книга вполне могла бы меня как читателя заинтересовать. С малышами же это всё еще несравненно интереснее. Весь процесс развития мышления, все движения интеллекта здесь гораздо виднее, гораздо ярче. Начиная кружок, я не мог предвидеть, до чего это дело окажется увлекательным, попросту захватывающим. В результате так вышло, что в течение многих лет мой круг чтения в большой степени складывался из книг по педагогике и психологии — это сначала, а потом пошло дальше, вширь: лингвистика, психиатрия, поведение животных, генетика поведения... Я открыл для себя новый мир, я стал богаче и надеюсь, что умнее, и всё это благодаря моим детям. Хотя, казалось бы, еще Грибоедов заметил: «Но чтоб иметь детей, кому ума недоставало?»

А дошкольная математика в ее чисто математическом аспекте, между прочим, намного проще школьной — она доступна любому читателю, а не одним лишь специалистам. Это очень сильно расширяет потенциальную аудиторию книги.

В общем, главное сделано: я сам себя сумел убедить, что книжка эта интересна не мне одному. Теперь я могу с чистой совестью рекомендовать ее читателю. (Признáюсь однако без лукавства, что многие друзья, читавшие первую, еще рукописную версию дневника, уже давно призывали меня издать его в виде книги. Множество ксерокопий разошлось сначала по Москве, а потом и по всему миру. Этот интерес не угасает уже в течение двадцати лет, и это для меня еще один аргумент в пользу данного предприятия.)

Зачем вести кружок? Зачем нужен дневник?

Кружок, как и любая другая форма систематических занятий, — это способ самодисциплины. В принципе, казалось бы, можно заниматься с детьми и без кружка. Задавать время от времени какие-то вопросы, задачи, что-то обсуждать. Но в реальной жизни так не получается, и весь проект очень скоро превращается в утопию. Вчера было некогда, сегодня нет настроения или устал... И вообще — почему непременно сейчас, сию минуту? Успеется, время еще есть. Как-нибудь на днях...

И в итоге ничего не происходит.

Если же вы знаете, что завтра в одиннадцать утра к вам приведут четверых малышей, и вам нужно будет чем-нибудь их развлекать хотя бы полчаса, вот тогда ситуация в корне меняется. Хотите вы того или не хотите, но вам придется сесть в укромный уголок и начать что-то придумывать. Не получается придумать самому — значит лезть в какие-нибудь книжки за идеями. А когда настойчиво над чем-то думаешь, рано или поздно в голову приходят совсем новые идеи, которые вообще не появились бы, если бы не давление обстоятельств.

Или, допустим, вы породили новую идею, но она может потребовать какой-то «материальной подготовки»: нужно что-то вы́резать, нарисовать, склеить... Чтобы подвигнуть себя на такой «труд ради семьи», нужно иметь более жесткие и более конкретные стимулы, чем просто залетевшая в голову мысль о возможной забавной задаче.

Дети, между прочим, тоже больше любят, когда их деятельность сопряжена с неким ритуалом. Если взрослые начнут ни с того ни с сего отвлекать детей от игры и приставать к ним с какими-то задачами, это вызовет скорее легкое раздражение и желание поскорей отделаться от этой неуместной навязчивости. И совсем другое дело — раз в неделю в определённое время собираться всем вместе, чтобы заниматься чем-то серьёзным.

Таков вкратце ответ на первый вопрос: зачем вести кружок?

Что касается дневника, то никакого дневника я поначалу не вёл, да и вообще особо серьезного значения своим занятиям не придавал. Читатель увидит, что дневник начинается только с 21-го занятия. Первые «20 недель» — это вовсе не пять месяцев, как можно было бы подумать, а все десять: за это время были и летние каникулы, и разные другие пропуски. И вообще не надо думать, что если мы решили заниматься регулярно раз в неделю, то так уж всегда прямо и следовали принятому решению.

А дальше произошло вот что. Примерно через полгода после начала занятий несколько моих друзей попросили меня рассказать, чем и как мы занимаемся. Я радостно открыл рот... — но вместо потока задач и идей, который должен был бы из меня излиться, вдруг возникла неловкая пауза. Оказалось, что я всё забыл! Ну, не совсем всё, конечно, но близко к тому. Что я прекрасно помнил — так это то общее чувство энтузиазма и наполненности детской энергетикой, которое постоянно сопровождало меня на наших занятиях. А вот его конкретное наполнение фактами где-то заблудилось среди извилин. Что-то подобное рассказывают об инвалидах, потерявших ногу: чувство, что нога здесь, сохранилось, а самой ноги нет.

Такого подвоха от собственной памяти я не ожидал; я был смущен и расстроен. После этого разговора, записав вкратце хотя бы то, что ещё хоть как-то удержалось в голове, я решил впредь вести конспект того, что делаю. Пусть у меня будет по крайней мере список задач, а тогда на их основе вспомнится и остальное. Интересно, что я уже тогда, в тот момент подумал про «остальное»; видимо, я уже интуитивно чувствовал недостаточность самой идеи «списка задач».

Очень скоро я совершил свое первое «теоретическое открытие» в области педагогики. Я обнаружил (понял, почувствовал?), что записывать сами по себе задачи дело не очень осмысленное. То, что по-настоящему интересно, — это вовсе не условия задач и не их решения, а тот процесс, тот путь, который ведет от одного к другому. Вы легко можете себе представить, что математические задачи, которые можно давать дошкольнику, сами по себе достаточно тривиальны (нетривиальным является только процесс их придумывания). С другой стороны, путь от задачи к решению вполне может занять несколько лет. Да-да, несколько лет, не удивляйтесь: вы еще увидите тому массу примеров. В течение всего этого времени интеллект ребенка вовсе не спит. Он бурлит, он кипит, он «носится, как угорелый» вокруг всего, что попадает в поле его внимания, в том числе и вокруг моих задач. Наш диалог на эту тему — это-то и есть самое интересное!

Таким вот образом мало-помалу мой «список задач» стал обрастать всё бо́льшим и бо́льшим количеством комментариев, историй, анекдотов, стал включать порой темы не только математические, там появились какие-то общие рассуждения и «теории», и так постепенно образовался этот дневник.

А потом наступил следующий этап: между кружком и дневником возникла *обратная связь*. Когда записываешь то, что видел и о чём думал, сами собой возникают новые мысли, возможные повороты сюжета, рождаются новые задачи и темы занятий. Осмысление становится глубже. Даже наблюдательность — и та заостряется, что ли. Порой вспоминаешь что-то произошедшее на кружке, на что в суматохе не обратил внимания, а потом бы и вообще забыл, если бы вовремя не записал. Вот такой в конечном итоге получился симбиоз, когда уже одно трудно себе представить без другого.

И, наконец, последний штрих. Прошло время, дети выросли — и прочли мой дневник. Оказалось, что они многое хорошо помнят, и их восприятие событий далеко не всегда совпадает с моим (а иногда и является в точности ему противоположным). По моей просьбе они добавили к тексту свои комментарии. Так появилось некое дополнительное измерение, делающее весь проект более диалогичным; как выразился один знакомый, возникает стереоскопический эффект.

Нужно ли редактировать дневники?

Я считаю, что безусловно да, нужно.

Старинные авторы говорили: «Эти листы никогда тиснению преданы не будут». То есть, мол, никогда не будут напечатаны. Чаще всего лукавили: рассчитывали на то, что взволнованные и благодарные потомки найдут их труд, придут в восторг от их искренности и откровенности (ведь писано-то только для себя!) — и опубликуют, и наступит вечная слава. Поймать такого автора бывает проще простого. Он постоянно поясняет сам себе то, что, казалось бы, и без того прекрасно знает. В таких ремарках нуждается читатель, но никак не сам автор.

Если же дневник и в самом деле пишется для себя, а потом читается кем-то другим, могут возникнуть чудовищные искажения. Представьте себе, скажем, такую ситуацию. Есть человек, которого я очень сильно уважаю; так сильно, что это граничит где-то даже с преклонением. Однако я всё же не слепой, и для меня не являются секретом некоторые его маленькие, а то и не такие уж маленькие недостатки и смешные черты характера. В дневнике «для себя» я могу вдоволь поиронизировать, поиздеваться над этим человеком; могу даже при случае излить свое раздражение. При этом мне вовсе ни к чему напоминать самому себе про мое к нему истинное отношение. («Но вы не подумайте, я его вообще-то очень уважаю...» — Кто «вы»?) Если этот текст потом попадет к постороннему читателю, картина окажется весьма далекой от реальности: о моем уважении читатель ничего не узнает, останутся одни насмешки, одна язвительность.

Или возьмем другой пример, более к нам близкий. Вот я пишу здесь о детях. Вроде бы так, да не совсем. На самом деле я пишу всего лишь об одном аспекте их жизни — об их взаимоотношениях с математикой. А ребенок к этому ну никак не сводится; по существу я описываю в среднем полчаса из двух недель его жизни. У него есть и другие интересы, и другие проблемы, и другие таланты. Читая эту книгу, даже я сам склонен об этом забывать, а уж что говорить о читателе, который этих детей никогда в глаза не видел! (Я еще вернусь к этой теме на стр. 290—294, но в отношении одной лишь Жени.) И это еще не говоря о том, что все эти дети уже давно выросли и им сейчас по 25—30 лет. Скоро уже их собственные дети будут читать о своих папах и мамах: «Когда папа был маленький...» То, что когда-то еще могло хоть как-то претендовать на документальность, с течением времени всё более и более приобретает черты художественного вымысла; это как будто написано о каких-то других людях.

Не могу сказать, что этот мой дневник был таким уж однозначно интимным документом. Это скорее *технический* документ. Я его и в самом деле писал для себя, но никогда не имел в виду держать его в секрете и охотно показывал всем, кто им интересовался. Но и этот технический характер тоже создает свои проблемы. Ну, не буду же я в самом деле сам себе объяснять, что такое ханойская башня или задача про волка, козу и капусту! И еще — в оригинале имелись повторения, непонятные места, записи, нуждавшиеся в расшифровке... (Впрочем, некоторые повторения я оставил; особенно те, где из одних и тех же посылок делаются совершенно разные выводы. Так оно «аутентичнее».)

Одним словом, есть масса соображений, иногда этических, иногда технических, по которым мой материал нуждался в самом серьезном редактировании. Вот почему я всегда уклонялся от многочисленных предложений опубликовать свой дневник «так как есть».

Ну, а почему же я его тогда так долго не редактировал? Зачем тянул столько лет?

Ну, чего тут объяснять? Жизнь есть жизнь. То одно, то другое (как говорил один персонаж Стругацких, объясняя, почему он не стал писателем).

И вообще, пора уже перестать ходить вокруг да около и перейти к делу.

Размышления неофита о дошкольной математике

Когда она начинается?

Такие сценки каждый из вас наблюдал не раз. Мама прячется за штору, потом с улыбкой выглядывает и говорит: «Ку-ку!». И снова прячется. А совсем еще крошечный малыш при каждом ее появлении хлопает в ладоши и радостно визжит. Оба совершенно счастливы. Обоим, конечно же, и в голову не приходит, что они занимаются математикой.

Я написал эту фразу не для того, чтобы шокировать читателя или подцепить его на удочку притянутого за уши парадокса. Я это всерьез. Если почитать труды психологов, можно узнать, что в возрасте до полутора лет основная интеллектуальная задача, которая стоит перед ребенком, заключается в том, чтобы открыть закон постоянства объектов. То есть, что вещи не исчезают, когда мы перестаем их видеть, а остаются существовать там же, где были, — существовать без нас. Оказывается, такой важный объект, как мама, исчезнув за портьерой, всё же продолжает быть где-то здесь, и вскоре появляется из-за той же портьеры.

Ребенок растет, и его осмысление мира растет вместе с ним. Вот микроскопического размера девочка играет в захватывающую игру: она подбирает по одному разбросанные на полу кубики и дает их папе, каждый раз при этом торжественно возглашая: «На!». Папа берет кубик — и она заливисто хохочет. Она совсем недавно усвоила слово «на» и использует его при каждой возможности. Неожиданно ее не совсем еще ловкие ручки захватывают сразу два кубика. Несколько мгновений она размышляет о том, как поступить; потом — эврика! — протягивает кубики папе и восклицает: «На-на!». Так и хочется тут перефразировать Пушкина: *следовать за мыслями малого человека есть наука самая занимательная*.

К двум годам очень многое уже усвоено. Вот мальчик двух с небольшим лет будит утром отца: «Папа, папа, ты спишь?» — «Да не́т, не сплю, — отвечает папа, протирая глаза. — Я на кухне, чай пью». Сын крайне удивлен: это противоречит всем ранее выученным урокам. На всякий случай он всё же бежит на кухню проверить. Возвращается он оттуда триумфатором: «Нет, ты не на кухне! Ты во́т, во́т ты где!» В следующий раз его тем же способом провести не удастся. Хочется всё же отметить вот этот момент самостоятельного исследования, когда он на всякий случай сбегал на кухню посмотреть. Мы все без всяких объяснений чувствуем, что это очень важное детское качество, и что хорошо было бы подольше его сохранить.

Считаем по-японски

Пройдет еще немного времени, и ребенка начнут уже совершенно сознательно «обучать математике». На практике это обычно означает, что его будут учить считать. Спору нет, умение считать — вещь важная и полезная. Но нам, взрослым, бывает очень трудно понять, что́ это умение означает в реальности.

Давайте встанем на место ребенка и попробуем сами научится арифметике... но только по-японски! Итак, вот вам первые десять чисел: *и́ти, ни, сан, си, го, ро́ку, си́ти, ха́ти, ку, дзю*. Первое задание — выучить эту последовательность наизусть. Вы увидите, что это не так-то просто. Когда это наконец удастся, можете приступать ко второму заданию: попробуйте научиться считать также и в обратном порядке, от *дзю* до *ити*. Если и это уже удается, давайте начнем вычислять. Сколько будет к *року* прибавить *сан*? А от *сити* отнять *го*? А *хати* поделить на *си*? А теперь давайте решим задачу. Мама купила на базаре *ку* яблок и дала по *ни* яблок каждому из *си* детей; сколько яблок у нее осталось? Очень трудное, но обязательное условие — не переводить на русский, даже в уме. После недолгого периода тренировок такой перевод может возникать в мозгу непроизвольно, против нашей воли, а то и вообще незаметно для нас самих.

Тот интеллектуальный подвиг, который совершают дети в начальной школе, я оценил позднее, оказавшись во Франции. Прожив здесь уже более десяти лет, я всё еще испытываю проблемы с французскими числительными. Всё потому, что французы считают не так, как мы, в интервале от 70 до 99. После шестидесяти девяти у них идет шестьдесят-десять (т. е. 70), шестьдесят-одиннадцать (71), шестьдесят-двенадцать (72) и т. д.; наконец, в конце десятка — шестьдесят-девятнадцать (79); после этого вдруг возникает четыре-двадцать (80), четыре-двадцать-один (81), четыре-двадцать-два (82) и т. д., четыре-двадцать-девять (89), — и снова, как ранее, четыре-двадцать-десять (90), четыре-двадцать-одиннадцать (91), четыре-двадцать-двенадцать (92), . . . , четыре-двадцать-девятнадцать (99); после этого, наконец, сто. Когда мне очень быстро говорят телефонный номер, или называют годы рождения и смерти какого-нибудь знаменитого человека, ухватить со слуха нужное число удается не всегда. Хорошо еще, что мне не приходится всё это складывать-вычитать.

(Отсюда, кстати, и происходит этот часто упоминаемый в педагогической литературе смешной ответ французского младшеклассника: на вопрос «Сколько будет двадцать умножить на четыре?» он ответил: «Будет четыре-двадцать, потому что умножение коммутативно».)

Но вот вы наконец научились беглому счету в пределах *дзю*. Сколько времени у вас на это ушло? Неделя? Месяц? Теперь вы отдаете себе отчет в том, что проблема здесь не в одной только механической памяти: если бы дело было только в ней, то вся работа заняла бы полчаса. Но если не в памяти, то в чём же? Можете ли вы вычленить из вашего опыта содержательные, чисто математические трудности, которые присутствуют в счете, но остаются где-то за кадром — невидимые, незаметные? Не так-то легко, не правда ли?

И, может быть, это к лучшему. Иначе энтузиасты раннего обучения тут же бросились бы изо всех сил объяснять малышу то, чего он пока еще понять не может, желая поскорее втащить его за шиворот на следующую ступеньку лестницы.

А ведь он мог бы сам. . .

Детсадовская геометрия

Вторая тема, традиционно фигурирующая в дошкольной математике — это геометрия. Считается, что детям нужно сообщить некоторый (довольно скромный) набор сведений, касающихся геометрических фигур: что такое треугольник, квадрат, круг, угол, прямая, отрезок, а также научить их простейшим приемам измерения. Но давайте вдумаемся: если ребенок легко отличает вилку от ложки, почему же ему трудно отличить квадрат от треугольника? Да ему и не трудно вовсе! В чём он действительно испытывает трудность, так это в уяснении логических взаимоотношений между понятиями, а также тех действий, которые можно с фигурами совершать. Многие первоклассники, например, считают, что если нарисовать квадрат косо, то он перестанет быть квадратом и станет просто четырехугольником (рис. 1). А вопрос о том, чего вообще больше — квадратов или четырехугольников, требует уже вовсе недюжинной логики.

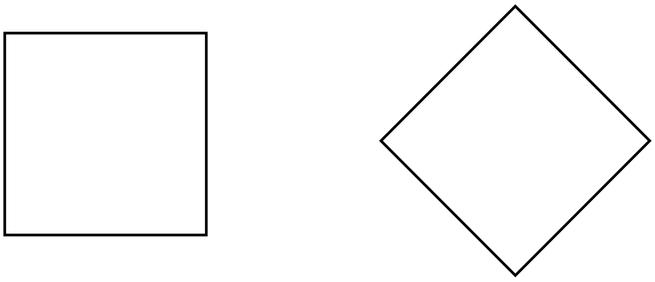


Рис. 1. Слева нарисован квадрат. А справа? Дети часто думают, что нет: повернутый квадрат теряет статус квадрата и превращается просто в четырехугольник.

Если взглянуть на дело с этой точки зрения, то треугольники с квадратами тотчас же теряют право первородства: задачи про вилки и ложки ничуть не менее математичны, если в них есть над чем подумать. Скажем то же самое несколько иначе. Школьная математика занимается «числами и фигурами», и это правильно. Но малышу об этих объектах мы можем сообщить очень мало содержательного. Из этого могло бы следовать, что никакого математического развития в раннем возрасте вообще не происходит. Могло бы, но не следует. Материала хоть отбавляй, нужно только правильно (и осторожно) подойти к делу.

Итак, правильный подход: каков он? На этот счет сколько людей, столько мнений. Приведу некоторые из них (в слегка утрированном виде, но только лишь для того, чтобы яснее выразить мысль).

Мнения

1. *«В современную эпоху неизмеримо выросли требования к математической подготовке выпускников детского сада».* — Ох, до чего же скулы сводит от этих «возросших требований». Бежать, бежать от них подальше!

2. *«А вы знаете, что это, вообще-то, очень опасно — чрезмерно загружать мозг ребенка сложными вещами. Интегралы там, и прочее».* — Господи! Да кто же вам говорил об интегралах-то?

3. *«Вы представляете, у него малые дети изучают теорию вероятностей! Взрослые люди, с высшим образованием, ничего в этом понять не могут, а малыши прекрасно разбираются. Я всегда говорил, что возможности нашего мозга еще не изведаны, и особенно — в раннем детстве».* — Дорогой энтузиаст, вы ошибаетесь: никакую теорию вероятностей мы не изучаем, хотя и наблюдаем некоторые вероятностные явления. (Впрочем, тем же занимается и человек, гадающий на автобусной остановке, какой автобус придет первым.) Ни за какие границы самых обычных возможностей человеческого мозга мы не выходим, а неизведанные возможности лучше оставим фантастам.

4. *«В раннем возрасте у детей обычно бывает превосходная память и способность к восприятию нового. К тому же в этом возрасте дети склонны во всём слушаться взрослых. Поэтому в этот период нужно вложить им в голову как можно больше информации. Позже, когда их взгляд на мир станет более критичным они уже не захотят заниматься тем, в чём не видят смысла, им нужно давать больше времени на размышления, а также делать их учебу более мотивированной».* — Эту точку зрения я вычитал в одной интернетской статье. Автор концепции — профессор, специалист по нейрофизиологии. Поскольку я не называю его имени, я позволю себе сказать без околичностей, что я об этом думаю: этот *бред сивой кобылы* не заслуживает комментария.

5. *«Не понимаю, зачем забивать детям голову такой ерундой! Пусть у ребенка будет нормальное детство».* — Уважаемый оппонент, вы подняли не один, а сразу два вопроса: насчет ерунды и насчет нормального детства. Что касается ерунды, то тут я спорить не буду; это, в конце концов, дело индивидуального вкуса. Я занимался с детьми тем, что люблю сам, и именно этот аспект наших занятий кажется мне очень важным.

Когда появились мои статьи в журнале, я неожиданно для себя самого оказался в совершенно не свойственной мне роли давателя советов. Разные папы и мамы писали мне письма. Наиболее четко обрисовала ситуацию одна мама: «Я с детства терпеть не могла математику. Но я знаю, что это очень важно для умственного развития ребенка. Посоветуйте мне, как мне заниматься математикой с моим сыном». К счастью, на этот раз я знал, что ответить. Я написал примерно следующее: ни в коем случае не занимайтесь с сыном математикой, если вы ее не любите. Занимайтесь только тем, что вам самой доставляет удовольствие; только в этом случае ваши занятия станут радостью для вас обоих. Это может быть что угодно. Например, если вы любите печь пироги, пеките их вместе с сыном... Вот только боюсь, не обиделась ли на меня эта мама, не сочла ли, что я считаю, будто математика — это не ее ума дело.

А вот насчет «нормального детства» — тут я буду спорить. Представьте себе такую сценку. Мы сидим на берегу реки и наблюдаем за одиночной осой, которая роет норку в плотном прибрежном песке. Она закончит работу, потом принесет туда достаточное количество еды для своего потомства, например, парализованных ею пауков, отложит в них свое яичко и закопает. Известный биолог, специалист по поведению животных Николас Тинберген показал, что оса ориентируется на местности по окружающим предметам. Можно положить, скажем, детский сандалик с одной стороны от гнезда, ракушку с другой, а когда оса улетит, передвинуть их на метр в сторону. Через пару минут оса возвращается и — точно по предсказанию Тинбергена — садится не около гнезда, а в метре от него, между сандаликом и ракушкой. Опыт вызывает большой энтузиазм не только у наших детей, но и у тех, кто случайно оказался рядом с нами на пляже. (Интересная деталь, между прочим: ни у кого из них не появилось ни малейшего побуждения эту осу прихлопнуть.) Вот я вас и спрашиваю: входит ли это занятие в ваше представление о нормальном детстве? Ведь именно за эти опыты Тинберген в свое время получил Нобелевскую премию по биологии. Так что и на эту тему тоже можно было бы в романтическом захлебе написать бог знает что — про вундеркиндов, ставящих нобелевские эксперименты.

Если я чему-то и учил детей, так это тому, чтобы воспринимать окружающий мир с интересом. На всю жизнь запомнил я одну фразу, сказанную мне как-то моим другом, замечательным математиком и педагогом Андреем Леоновичем Тоомом. Привожу ее здесь не как комплимент самому себе, а как прекрасную формулировку того идеала, к которому следует стремиться. Андрей сказал:

Ты их учишь не математике, а образу жизни.

Краткая история наших занятий

По случайным обстоятельствам в каких-то записях сохранилась дата нашего самого первого занятия: 23 марта 1980 года. Занятия с мальчиками, хоть и не очень регулярно, продолжались четыре года. За это время подросла Женя, и начался второй кружок — с ней и с ее подружками. Он продолжался два года. Было еще несколько разрозненных попыток вести кружки с другими детьми, но все они быстро заканчивались; ведь надо всё же учитывать, что всё это делалось помимо основной работы (которую я предпочел бы называть службой). Несколько раз я даже выступал в странной роли проезжего мэтра, дающего мастер-класс.

Однако в некоторый момент я решился пойти в школу! Сначала это был кружок в первом классе, где учился Дима; потом было еще несколько затей подобного рода, и даже — совершенно отчаянный шаг, как головой в омут — в рамках одного педагогического эксперимента я целый месяц проработал рядовым учителем первого класса в одной из московских школ. До этого я был уверенным в себе интеллектуалом, всегда готовым критиковать школу и учителей и давать им мудрые советы. Этот жестокий, но чрезвычайно полезный эксперимент над самим собой заставил меня многое изменить в своих воззрениях.

Тут я, однако, хронологически забежал вперед.

Важным этапом истории явилось то, что друг нашей семьи, известный психолингвист Ревекка Марковна Фрумкина, чей домашний семинар я с некоторого времени стал посещать, прочитав дневник, привела меня в редакцию журнала «Знание—Сила», где вскоре появились две мои статьи о кружке (№ 8 за 1985 год и № 2 за 1986 год). Была потом и третья, но она как-то «не прозвучала». А эти две неожиданно стали весьма популярными. Замечательный детский поэт и педагог Вадим Александрович Левин даже сказал мне как-то, что мои статьи — это, мол, классика педагогической литературы. Дальнейшая их судьба такова: через некоторое время они были переведены на английский язык в журнале The Journal of Mathematical Behavior; потом появились в Интернете, кажется, на четырех разных сайтах; потом были перепечатаны в газете «Дошкольное образование», май и июль 2000, на этот раз с комментариями В. А. Левина; потом вошли в его же книгу «Уроки для родителей» (М.: ФОЛИО, 2001); наконец, совсем недавно, в 2005 году, издательский дом «Первое сентября» выпустил брошюру под названием «Домашняя школа для дошкольников», содержащую тот же текст, но, к сожалению, без фамилии Левина. (То же самое печальное явление имеет место и в некоторых интернетских публикациях. Таким образом, в частности, некоторые комплименты — чтобы не сказать дифирамбы —

Левина в мой адрес оказываются приписанными мне самому. С этим трудно что-нибудь поделать: например, о выходе брошюры в «Первом сентября» ни меня, ни Левина даже не известили.)

А между тем начиналась перестройка. Наш близкий друг Степан Пачиков организовал в Москве детский компьютерный клуб; компьютеры купил и подарил клубу Гарри Каспаров. В то время (1986 год) это было едва ли не единственное место в Союзе, где школьники могли заниматься на компьютерах. Естественно, что мне поручили там занятия с самыми маленькими. Далее были летние компьютерные лагеря в Переславле-Залесском и зимний лагерь в Звенигороде. Был еще один компьютерный клуб «Зодиак». Всего уже и не перечислишь. Я был нарасхват и везде естественным образом воспринимался как специалист по малышам. Меня втянуло в орбиту так называемого «Временного научного коллектива Школа-1», который должен был готовить реформу всей школьной системы; формальным его руководителем был академик Велихов, фактическим лидером — Алексей Семёнов. Из деятельности того времени хочу отдельно отметить написанный нами учебник «Алгоритмика» для 5-7 классов (авторы А. К. Звонкин, А. Г. Кулаков, С. К. Ландо, А. Л. Семенов, А. Х. Шень; после нескольких промежуточных ротапринтных версий книжка была издана в издательстве «Дрофа» в 1996 году; впоследствии несколько раз переиздавалась). Кое-какие темы, впервые появившиеся на кружке, были в слегка усложненном виде использованы в этом учебнике. Очень забавно мне было потом узнать, что этот курс использовался также для обучения младшекурсников в одном американском университете.

* * *

Здесь, однако, жизнь разворачивает перед нами еще один сюжет, связанный с кружком лишь косвенно. В 1989 году я сменил место работы. До этого в течение 13 лет я проработал во «Всесоюзном научно-исследовательском и проектно-конструкторском институте комплексной автоматизации нефтяной и газовой промышленности». Знающим людям не обязательно раскрывать смысл этого «недавнего ретро»: третьеразрядный прикладной институт, с вахтерами и поездками в колхоз; сердечные и доброжелательные отношения с товарищами по работе — соседями по судьбе; при этом невыносимо скучная и бессмысленная работа (сейчас те же самые люди делают нечто вполне осмысленное и полезное, но уже не в этом институте). Службу свою я ненавидел, но никаких шансов найти другую не было. И вот я вдруг оказался в «Научном совете по комплексной проблеме “Кибернетика” Академии наук СССР», в команде, занимающейся подготовкой и внедрением курсов информатики в школьное образование, а также, под предлогом информатики, всевозможными иными педагогическими новациями. Получилось у нас, наверное, «как всегда», но в тот период все мы были полны энтузиазма и увлечены своей работой, порой до полного истощения физических сил. Если посмотреть на это дело не с точки зрения большой истории, а с точки зрения моей собственной биографии, то совершенно очевидно одно: не было бы кружка — не было бы и моей новой работы.

Помимо этого я, как и прежде, продолжал заниматься математикой. Как бы это объяснить попонятнее? Была научная работа в области педагогики, но была и научная работа в области самой математики. Но и в этой деятельности я так же резко и кардинально сменил специализацию. Толкнуло меня к этому среди всего прочего и то, что в уже упоминавшемся детском компьютерном лагере в Переславле-Залесском я нашел двух коллег, увлеченных той же, новой для нас для всех, темой: Сергея Ландо и Георгия Шабата. Мы начали работать вместе — и продолжаем до сих пор: наша совместная с С. Ландо монография вышла в издательстве Springer-Verlag совсем недавно, в 2004 году.

В 1990 году я впервые поехал во Францию. Думаю, что в прежнем институте меня бы туда просто не отпустили; но в Совете по кибернетике обстановка была совсем иная. В тот период я еще очень плохо знал специалистов в моей новой области математики. Эта поездка помогла мне сориентироваться: оказалось, что самые близкие мне по интересам люди работают в Бордо. Я туда съездил; потом еще раз; потом меня пригласили на год; и в конце концов получилось так, что я там и остался. Вот так всё странно обернулось: тот факт, что я сегодня профессор университета в Бордо, в очень большой степени связан с тем, что когда-то много лет назад я стал вести математический кружок для малышей.

(Раз уж я ударился в мемуаристику, позволю себе рассказать тут еще одну историю. Мне для этого придется немножко похвастаться, но без этого и истории не выйдет. Я, значит, был приглашенным профессором в городе Бордо, сроком на год. И вот мне поручили прочесть четыре лекции о «теории сложности» на курсах повышения квалификации учителей. Проблема была в том, что аудиторию составляли учителя математики, физики, биологии, истории и литературы! Что можно сделать в такой смешанной компании? В предыдущие годы слушатели регулярно жаловались, мол, зачем им вставили в программу эту дурацкую тему? Никто этот курс брать не хотел. Как тут быть?... Эврика! Я сообразил, что можно использовать несколько сюжетов из упоминавшегося выше учебника алгоритмики. Они достаточно просты, чтобы быть понятными всем, но при этом даже и для учителей математики будут новыми; при желании их можно также развивать и усложнять. Успех был сногсшибательный. Мне передали, что слушатели «очарованы» и только спрашивают, почему всего четыре лекции. Договорились, что я прочту еще две. Было очень лестно, но это только полдела. Вторые полдела состоят в том, что этот эпизод оказал несомненное влияние на выбор комиссии, которая решала, кого из пары десятков кандидатов принять на постоянную должность профессора.)

Благодарности

Читатели у меня умные; они и сами догадываются, с чего я начну этот раздел. Я начну его с благодарности детям. Когда я был молодой, мои родители часто приставали ко мне с нравоучениями: «Вот будут у тебя свои дети — тогда поймешь». Я злился: ну что я пойму, что я пойму? Подумаешь, дети! Вон у всех вокруг есть дети — и что с того? Не такая уж это большая редкость. Я тогда не мог представить себе, до какой степени меняется всё мировоззрение, всё мироощущение человека, когда у него появляются дети. Готов поверить, что существуют люди с лучшим воображением, чем у меня, и они способны это понять даже не имея собственных детей; наверное, для них соответствующий переворот в сознании протекает менее бурно. Но в моей «персональной вселенной» Большой взрыв произошел именно таким образом — благодаря детям. Вот за это им и спасибо.

Я глубоко благодарен *всем* детям-участникам нашего кружка. Трудно передать, сколь многому я у них научился. Но им я хочу сказать еще одну вещь. Я честно и изо всех сил старался делить свое внимание поровну между всеми, но боюсь, что это не всегда получалось. Очень хочется надеяться, что никто не остался на меня в обиде. Ну, а если какие-то упреки в мой адрес у них в душе сохранились, я могу им сказать только одно: «Вот будут у вас свои дети — тогда поймете».

Я благодарен моей жене Алле Ярхо. Во-первых, за то, что у нас появились дети — она в этом деле была активной участницей. Во-вторых, идея организовать кружок принадлежит именно ей. Вообще, наш кружок был почти в той же степени ее, что и мой, это будет вполне очевидно из дальнейшего. Я благодарен ей за моральную поддержку тогда, а также и за моральное давление во все последующие годы — чтобы я наконец взялся и довел этот дневник до конца. И, разумеется, в процессе его подготовки она была и корректором, и стилистическим редактором, и советчиком, и просто заинтересованным читателем.

Ревекка Марковна Фрумкина «вывела меня в свет»: благодаря ей наше сугубо семейное предприятие получило широкую известность. Рита Марковна (так зовут ее друзья) является крестной матерью множества интересных проектов. Перед вами один из них. Хочу добавить, что обсуждения с ней позволили мне «причесать» многие из моих мыслей.

Алексей Львович Семенов был моим формальным начальником в Совете по кибернетике, но по существу он был для меня ориентиром во многих вопросах, да и просто «старшим товарищем» (хоть он и моложе меня). Его убежденность в том, что эта работа представляет более широкий интерес, частично передалась и мне.

Александр Ханевич Шень поначалу был одним из заинтересованных читателей моих рукописных тетрадок и уговаривал меня поскорее всё это опубликовать. Со временем, однако, не выдержав темпов моей работы, он организовал группу школьников и студентов, которые подготовили на компьютере первую версию книги. Особенно хочется отметить в этой связи огромную работу, которую проделал Владимир Луговкин. После этого мне уже некуда было деваться — пришлось всерьез заняться редактированием. И снова незаменимый Саша установил на мой французский компьютер русифицированную версию LaTeX'а. Без Саши Шеня эта работа затянулась бы, наверное, еще на годы.

Список тех, кому я благодарен, не только не окончен, но даже еще по существу и не начат. Но если я буду продолжать в том же стиле, то читатель всё равно пропустит эту часть, не читая. Поэтому скажу коротко: я глубоко признателен всем тем, с кем я когда-либо «долго ли, коротко ли» обсуждал эту работу, тем, кто своей заинтересованностью укрепляли мой дух. Дорогие друзья: спасибо вам!

* * *

В Москве, в Большом Власьевском переулке (недалеко от Арбата), расположено одно совершенно замечательное и уже успевшее прогреметь на весь мир учреждение: «Московский центр непрерывного математического образования» (МЦНМО). Слово «непрерывный» здесь означает — рассчитанный на все возрасты. В состав центра входит Независимый Московский университет и аспирантура при нём, но здесь же организуются всевозможные математические олимпиады и другие внеклассные занятия для школьников старших и средних классов. Чем не идея — расширить спектр возрастов, охватив также и дошкольников? Я счастлив и горд тем, что моя книга выходит в издательстве МЦНМО. К тому же в таких местах неизбежно встречаешь старых друзей. Один из них, Вадим Олегович Бугаенко, хоть это и не входит в его прямые обязанности, организовал работу по подготовке этой книги. Он сумел собрать вокруг себя превосходную команду. Я благодарен всем, но в первую очередь Михаилу Панову, который, в частности, сделал заново все рисунки. (Специалисты оценят его виртуозное умение творить художественные иллюстрации с помощью программы METAPOST, задуманной изначально лишь как инструмент для создания графических изображений в научных статьях.)

С работой центра можно ознакомиться на сайте `http://www.mccme.ru/`

Может быть, именно там вы эту книгу и читаете. На этом же сайте можно узнать, где и как ее можно купить.

Два предупреждения

Я должен сделать два важных заявления.

Первое: *не все приведенные в этой книге задачи придуманы мной.* Я использовал самые разнообразные источники — от статей по психологии до сборников по популярной математике или просто рассказов друзей. Иногда я сохранял условия, часто же менял их как мне вздумается, порой до полной неузнаваемости, и иногда прямо на ходу, на самом занятии. Многие из моих источников давно забыты; другие потерялись в переездах, и я сейчас не могу назвать точную ссылку. Наверняка есть и задачи, про которые я уже и сам давно забыл, что это не я являюсь их автором. Чтобы отдать этот долг человечеству, я разрешаю всем желающим безвозмездно пользоваться всем здесь изложенным и обязуюсь ни на кого не подавать в суд за плагиат. Я буду только рад (и даже горд), если придуманные мной сюжеты войдут в фонд педагогического фольклора.

И второе предупреждение: *представленные здесь рассказы не имеют стенографической точности.* Они были записаны по памяти; к тому же не всегда возможно разобрать, что говорят несколько детей одновременно. Я уверен, что многое пропустил мимо ушей и что по крайней мере кое-что понял превратно. Впрочем, думаю, что всё это и так очевидно.

Глава 1.

Первое занятие и мысли вокруг

Как это происходило

В приведенном здесь рассказе использованы материалы моей статьи «Малыши и математика, непохожая на математику» (журнал «Знание—Сила», № 8 за 1985 год).

Участников нашего кружка четверо: мой сын Дима и трое его друзей — Женя, Петя и Андрюша. Дима — самый младший, ему 3 года и 10 месяцев; самый старший — Андрюша, ему скоро должно исполниться пять.

Мы рассаживаемся вокруг журнального столика. Я, конечно, волнуюсь: как я тут с ними со всеми управлюсь? Для начала говорю детям, что мы будем заниматься математикой, и для поддержания авторитета добавляю, что математика — это самая интересная в мире наука. Тут же получаю вопрос: «А что такое наука?» Приходится объяснять: наука — это когда много думают. «А я думал, что фокусы будут», — несколько разочарованно произносит Андрюша. Его дома предупредили, что дядя Саша будет с ними сегодня заниматься, и будут фокусы. «Фокусы тоже будут», — говорю я и, сворачивая вступление, перехожу к делу.

Вот первая задача. Я кладу на стол 8 пуговиц. Не дожидаясь моих указаний, мальчики вместе кидаются их считать. Видимо, несмотря на юный возраст, некоторое представление о том, что такое математика, у них уже есть: математика — это когда считают. Когда шум утих, я могу сформулировать собственно задачу: «А теперь положите на стол столько же монет». Теперь на столе оказывается еще 8 монет. Мы кладем монеты и пуговицы в два одинаковых ряда, друг напротив друга. «Чего больше, монет или пуговиц?», — спрашиваю я. Дети смотрят на меня несколько недоуменно; им не сразу удается сформулировать ответ: «Никого не больше». — «Значит, поровну, — говорю я. — А теперь смотрите, что я сделаю». И я раздвигаю ряд монет так, чтобы он стал длиннее. «А теперь чего больше?» — «Монет, монет больше!», — хором кричат ребята. Я предлагаю Пете сосчитать пуговицы. Хоть мы их уже считали четыре раза, Петя ничуть не удивляется моему заданию и подсчитывает количество пуговиц в пятый раз: «Восемь». Предлагаю Диме сосчитать монеты. Дима считает и говорит: «Тоже восемь». «*Тоже* восемь? — подчеркиваю я голосом. — Значит, их поровну?» — «Нет, монет больше!», — решительно заявляют мальчики.

По правде говоря, я заранее знал, что ответ будет именно таким. Эта задача — только одна из бесчисленных серий задач, которые давал в своих экспериментах детям-испытуемым великий швейцарский психолог Жан Пиаже (о «феноменах Пиаже» немного рассказывается в следующем разделе). В своих опытах он установил: маленькие дети не понимают того, что нам с вами кажется самоочевидным — если несколько предметов как-нибудь переставить или переместить, то их количество от этого не изменится. Итак, я знал заранее, что скажут дети. Знал, но почему-то не приготовил никакой разумной реакции. А как поступили бы вы, читатель? Что бы вы сказали детям?

К сожалению, самый распространенный прием, которым пользуются в такой ситуации почти все взрослые, состоит в том, чтобы начать детям изо всех сил что-то втолковывать. «Ну как же так! — с наигранным удивлением говорит взрослый. — Откуда же их могло стать больше? Ведь мы же никаких новых монет не добавляли! Ведь мы их только раздвинули — и всё. Ведь раньше же их было поровну — вы же сами говорили! Значит, их никак не могло стать больше. *Конечно же* (выделяем голосом), монет и пуговиц осталось поровну!»

Старания напрасны — такая педагогика никуда не ведет. Точнее, ведет в тупик. Во-первых, не надейтесь, что ваша логика в чём-нибудь убедит ребенка. Логические структуры он усвоит еще позже, чем закон сохранения количества предметов. Пока этого не произойдет, логические рассуждения не покажутся ему убедительными. Убедительной является только интонация вашего голоса. А она покажет ребенку лишь то, что он опять оказался не на высоте и что-то сделал не так. Дети сдаются не сразу, их здравый смысл не так-то легко сломить. Но если насесть как следует, можно добиться того, что они перестанут опираться на собственный ум и наблюдательность, а будут пытаться угадать, чего желает от них взрослый. Взрослые вообще предъявляют детям множество необъяснимых требований: почему-то нельзя рисовать на стене; почему-то надо идти ложиться спать, когда игра в самом разгаре; почему-то нельзя спрашивать: «А когда этот дядя уйдет?». Вот и сейчас происходит что-то аналогичное: хотя я прекрасно вижу, что монет больше, чем пуговиц, но почему-то полагается отвечать, что их поровну. Отношение к математике как к некоему ритуалу, в котором нужно произносить определенные заклинания в определенном порядке, зарождается в школе и прекрасно доживает до университета, где его можно встретить даже у студентов-математиков.

Так что же всё-таки делать? Вообще не задавать подобных вопросов, что ли, если уж нельзя прокомментировать ответ?

Напротив, задавать вопросы как раз нужно. Очень полезно также обменяться мнениями: «А ты, Женя, как думаешь? А ты, Петя? А почему? А *насколько* монет стало больше?» Можно даже наравне с остальными высказать и свою точку зрения, но очень осторожно и ненавязчиво, снабдив всяческими оговорками типа «мне кажется» и «может быть». Иными словами, весь свой авторитет взрослого нужно употребить не на то, чтобы закрепить за этим авторитетом абсолютную власть единственно правильного суждения, а на то, чтобы убедить ребенка в важности и ценности его собственных поисков и усилий. Но еще интереснее натолкнуть его на противоречия в его собственной точке зрения. «А сколько монет надо забрать, чтобы снова стало поровну?» — «Две монеты надо забрать». Забираем две монеты; считаем: пуговиц восемь, а монет шесть. «А теперь чего больше?» — «Теперь поровну». Очень хорошо. Я снова раздвигаю монеты пошире и задаю тот же вопрос. Теперь уже оказывается, что шесть монет — это больше, чем восемь пуговиц. «А почему их стало больше?» — «Потому что вы их раздвинули». Мы опять отбираем две монеты; потом еще раз. Наконец, картинка становится такой, как показано на рисунке 1.1.

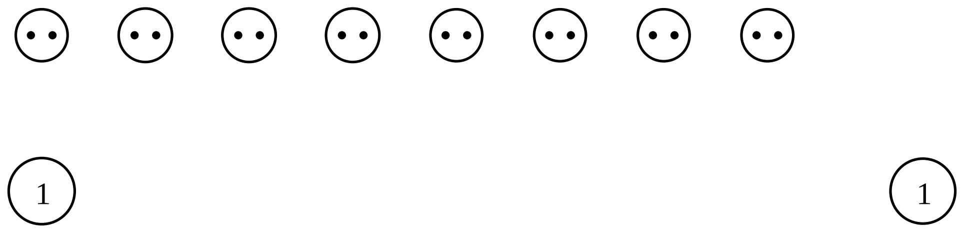


Рис. 1.1. В верхнем ряду лежат 8 пуговиц, в нижнем — 2 монеты. Чего больше, монет или пуговиц?

В этот момент вдруг завязывается яростный спор. Одни мальчики попрежнему считают, что монет больше, другие вдруг «увидели», что больше пуговиц. Пожалуй, самое время прерваться и перейти к другой задаче; пусть дальше думают сами.

◁ Я был среди тех, кто говорил, что монет всё равно больше. В первый раз я просто согласился со всеми остальными, а потом просто говорил не думая. Все предыдущие разы так было правильно (т. е. папа с этим соглашался), поэтому у меня не было причины менять мнение и в последний раз. — Дима ▷

Все эти мысли и идеи пришли ко мне далеко не сразу, так что в своем рассказе я забежал вперед — и в будущие свои размышления, и в будущие занятия. Эта задача еще многократно возникала у нас в разных обличьях. Было у нас, например, две армии, которые никак не могли победить друг друга, потому что у них было поровну солдат. Тогда одна из них раздвинулась, солдат у нее стало больше, и она начала побеждать. Увидев это, вторая армия раздвинулась еще шире и т. д. (Закончить историю можно в соответствии с собственной фантазией.) Еще был Буратино, которого Лиса Алиса и Кот Базилио пытались обмануть, раздвигая пять золотых монет и утверждая, что их стало больше. Я научился не ждать легких побед. Всё равно раньше чем через два-три года дети не усвоят закон сохранения количества предметов, как бы вы их ни учили. Да самое главное, это вовсе и не нужно! Я уверен: от этих скороспелых знаний пользы ровно столько же, сколько от преждевременных родов. Всему свое время, и не следует опережать события, в том числе и в области воспитания интеллекта. (Признаю, что эта точка зрения высказана здесь в несколько демагогической форме. Но аргументы в ее пользу — а их немало — будут обильно рассыпаны по дальнейшему тексту.) Однако, повторяю, все эти мысли были потом. А тогда, на первом занятии, какое-то интуитивное озарение удержало меня от «объяснений», и я просто перешел к следующей задаче.

На столе шесть спичек. Складываю из них различные фигурки и прошу ребят по очереди сосчитать, сколько здесь спичек. Каждый раз их оказывается шесть штук... Нет, я слишком увлекся схоластическими рассуждениями и стал писать как-то по-канцелярски. Давайте вернемся в живую детскую аудиторию, давайте увидим, как это происходит в жизни.

Каждый новый результат подсчета встречается настоящим взрывом восторга и хохота. Вот уже Андрюша и Женя кричат, что всегда получится шесть. Вот уже Дима довольно невежливо рвет у меня из рук спички, чтобы самому сложить какую-то вычурную фигурку, а Петя, напротив, очень вежливо спрашивает, не могу ли я ему дать еще спичек. Еще чуть-чуть — и их веселье перерастет в неуправляемое детское буйство. Надо их как-то удержать, и внимательно выслушать Андрюшу с Женей («Почему вы думаете, что всегда будет шесть?»), и к тому же не упускать новые повороты мысли: ведь тут как раз Дима сложил трехмерную фигурку — колодец. Я привлекаю к ней всеобщее внимание. На этот раз даже Андрюша с Женей уже не так твердо уверены, что снова получится шесть. Считать спички очень трудно — колодец всё время разваливается. Мы его восстанавливаем, считаем снова, он опять разваливается... Наконец у Димы получается семь! Все в легком недоумении, но особенно сильного удивления никто не проявляет: семь так семь, хоть и немного странновато. Ну что ж, я, наверное, повторяюсь — ну так и повторюсь, не суть важно: моя педагогическая задача состоит не в том, чтобы сообщать детям окончательно установленные истины, а в том, чтобы разбудить их любознательность. Самый замечательный результат, на который я хотел бы рассчитывать, о котором, можно сказать, мечтаю — это чтобы кто-нибудь из мальчиков через несколько дней (или месяцев) вдруг по собственной инициативе сам сложил спички колодцем и пересчитал их — просто потому что стало интересно, потому что захотелось узнать, как же обстоят дела на самом деле. Ведь это было бы маленькое самостоятельное исследование! Ну, а если этого не случится, то, будем надеяться, произойдет в другой раз, с другой задачей. (В будущем я имел немало подтверждений, что так оно и бывало неоднократно.) Так или иначе, я ограничиваюсь лишь замечаниями типа «как интересно!» и «замечательно!» — в надежде, что эта ситуация покрепче застрянет у них в памяти.

Детская память — это совершенно поразительная вещь. Не могу удержаться, чтобы не вставить здесь одну историю из более позднего времени.

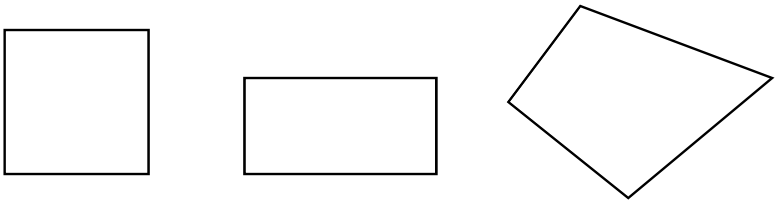


Рис. 1.2. Сколько на этом рисунке квадратов? Сколько прямоугольников? Сколько четырехугольников? Даже взрослые часто ошибаются в ответах на эти вопросы.

Одно из занятий: перед нами на столе — три фигурки из картона (рис. 1.2). Мы детально и обстоятельно обсуждаем их свойства. Прежде всего, у всех фигурок — по четыре угла. Значит, каждую из них мы можем назвать четырехугольником. Итого: у нас три четырехугольника. При этом два из них отличаются тем, что у них все углы прямые. За это их называют прямоугольниками. Один из двух прямоугольников особый: у него все стороны одинакового размера. Его называют квадратом. У квадрата как бы три имени: его можно назвать и квадратом, и прямоугольником, и четырехугольником — и всё будет правильно. Моя информация встречается не без сопротивления. Дети упорно стремятся мыслить в понятиях непересекающихся классов. А характер их объяснений внушает подозрение в том, что они еще не осознали по-настоящему великий закон «целое больше своей части». Десять минут назад они спорили о том, являются ли папы и дедушки мужчинами, а мужчины — людьми. А сейчас они никак не соглашаются называть квадрат прямоугольником: уж или одно, или другое. Я провожу настоящую агиткампанию за равноправие квадрата среди всех прямоугольников. Постепенно моя пропаганда начинает действовать. Мы еще раз подводим итог: сколько у нас квадратов? — Один. — А прямоугольников? — Два. — А четырехугольников? — Три.

Казалось бы, всё хорошо. И я задаю последний вопрос — я его уже упоминал во введении: «А чего вообще на свете больше — квадратов или четырехугольников?» — «Квадратов!» — дружно и без тени сомнения отвечают дети. «Потому что их легче вырезать», — объясняет Дима. «Потому что их много в домах, на крыше, на трубе», — объясняет Женя.

Такова завязка этой истории. А развязка произошла через полтора года, без всякой подготовки и даже без всякого внешнего повода. Летом на прогулке в лесу Дима неожиданно сказал мне: «Папа, помнишь, ты давал нам задачу про квадраты и четырехугольники — чего больше. Так мне кажется, мы тогда тебе неправильно ответили. На самом деле больше четырехугольников». И дальше довольно толково объяснил, почему. С тех пор я и исповедую принцип: вопросы важнее ответов.

... Психологи проводили и продолжают проводить множество экспериментов, пытаясь научить детей некоторым первоначальным математическим закономерностям. Например, делают так. Сначала группу ребят проверяют, понимают ли они такую простую вещь: если кусок пластилина помять, раскатать и вообще придать ему другую форму, то количество пластилина от этого не изменится. Тех, кто этого не понимает, делят на две части. Одну оставляют «свободной» — это так называемая контрольная группа. А другую начинают обучать закону сохранения количества вещества: показывают, объясняют, взвешивают, сравнивают. Недели через две опять проверяют участников обеих групп, смотрят, кто чему научился. Чаще всего в результате оказывается, что прогресс в обеих группах весьма незначительный и при этом совершенно одинаковый. Обычно психологи недоумевают: почему же дети, которых так старательно обучали, так ничему и не научились. Я, читая отчеты об этих экспериментах, заинтересовался противоположным явлением: почему дети, которых ничему не учили (контрольная группа), тоже чуть-чуть продвинулись вперед. Моя гипотеза после нескольких лет занятий с малышами такова: это происходит потому, что им тоже задавали вопросы.

Однако вернемся на наше занятие. Следующая задача — еще одна вариация всё на ту же тему закона сохранения количества предметов. Те самые шесть спичек, которые еще остались на столе после предыдущей задачи, раскладываются в рядок. Я прошу к каждой спичке приложить пуговицу (рис. 1.3).

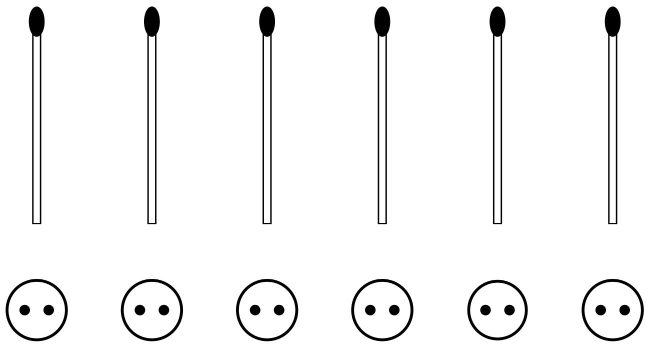


Рис. 1.3. Спичек и пуговиц поровну.

Стандартный вопрос: «Чего больше — спичек или пуговиц?» — «Поровну». — «Значит, пуговиц столько же, сколько спичек», — резюмирую я. Забираю все пуговицы в кулак и прошу сказать, сколько у меня в кулаке спрятано пуговиц. Характерно, что никто не делает ни малейшей попытки подсчитать спички. Да и зачем, собственно? Ведь спрашивают про пуговицы — значит, и считать нужно пуговицы. Дима как человек со мной на самой короткой ноге пытается разжать мой кулак, другие удивленно спрашивают: «Как же мы можем их сосчитать?» Я смеюсь: «Сосчитать, конечно, нельзя — пуговицы спрятаны. Но попробуйте как-нибудь угадать». Тогда на меня обрушивается настоящий шквал отгадок, чаще всего ни на чём не основанных. Каждый кричит что-то свое; при этом один лишь Женя кричит правильный ответ. Я пытаюсь его выслушать, спросить, почему, но он ретируется. Жене вообще часто мешает робость. Пока все кричат хором, перебивая друг друга, он, пожалуй, чаще других кричит правильный ответ. Но стоит всех утихомирить и обратиться лично к нему, как он смущается и уходит в себя. С Андрюшей — другая проблема. Он мальчик очень целеустремленный, и на наших занятиях ему явно не хватает мотивации. Когда я в следующий раз предложил ту же задачу в другой аранжировке — уже были не пуговицы со спичками, а солдаты с ружьями, потом они ушли, а ружья остались, и теперь разведчику нужно узнать, сколько было солдат — вот тогда он первым догадался, что можно сосчитать ружья. И еще он любит игры, в которых кто-то должен выйти победителем. Но у меня не всегда хватает фантазии представить задачу в подходящей форме. Тем более что для остальных детей этот аспект безразличен. Зато Дима вообще не любит решать чужие задачи, а любит придумывать свои. С трудом я подобрал к нему ключик — стал говорить примерно так: «Придумай задачу, в которой было бы...» — и дальше излагаю свое условие. К тому же его решения часто отличаются какой-то странной вычурностью (особенно это будет видно в следующей задаче); его довольно трудно ввести в колею здравого смысла. И с Петей, конечно, свои сложности... Как же мне поспеть-то — одному на всех? Боже мой, у меня всего четыре ученика, а я не могу обеспечить им индивидуальный подход! Что же может сделать учитель, у которого сорок человек в классе? Учи́теля часто любят сравнивать с дирижером. Я сам себе кажусь похожим скорее на жонглера, у которого вот-вот всё рассыпется по арене. Так и сейчас: пока я пытаюсь беседовать с Женей — что да почему — Дима уже вытащил карточки для следующего задания («четвертый — лишний») и спрашивает: «Папа, а это что, следующая задача?» Остальные двое уже рвут у него карточки из рук и безжалостно мнут их при этом, не щадя вечернего родительского труда. Женя уже тоже косится в их сторону и слушает меня вполуха. Я разжимаю кулак, мы бегло проверяем, сколько пуговиц, и переходим к следующей задаче.

Правила игры «четвертый — лишний» общеизвестны. Детям дают четыре карточки, на которых изображены, например, заяц, ежик, белка и чемодан. Нужно сказать, какой из этих рисунков лишний. Забавно наблюдать, как дети почти всегда дают правильный ответ, хотя далеко не всегда могут его объяснить. «Лишний — чемодан». — «Почему?» — «Потому что он не заяц, не ежик и не белка». — «Ах, вот как! А по-моему, лишний заяц. Потому что он не ежик, не белка и не чемодан!» Мальчики смотрят на меня в недоумении и заявляют настойчиво: «Нет, лишний чемодан!» Я пытаюсь узнать, нельзя ли все три нелишних предмета — зайца, ежика и белку — назвать одним общим словом. Наконец, Петя, который по словарному запасу опережает остальных, первый находит нужное слово — «животные». И в дальнейшем он часто выручал нас в подобных ситуациях.

(А как-то раз меня пригласили провести занятие в группе незнакомых детей, тоже лет четырех—пяти. Я выложил на стол свои любимые карточки с зайцем, ежиком, белкой и чемоданом и спросил, кто здесь лишний. Дети смотрели на меня с выражением полной затравленности и ужаса во взоре. Наконец один из них набрался храбрости и выдавил: «Поровну...» — Ага, понял я, с ними уже до меня как следует «позанимались».)

Между прочим, я даю также и задачи с неоднозначным ответом. Например: воробей, пчела, улитка и самолет. Можно лишним считать самолет (неживой), а можно улитку (не летает). На рис. 1.4 показан пример, когда каждый из предметов может быть объявлен лишним, так что суть задачи меняется. В таких задачах я сам по очереди назначал лишних, а мальчики должны были давать объяснения. Так я пытался внушить им эту важную для математики идею, что нужны не только и даже не столько правильные ответы, сколько правильные объяснения; или, на более научном языке, не только правильные утверждения, но и их доказательства.

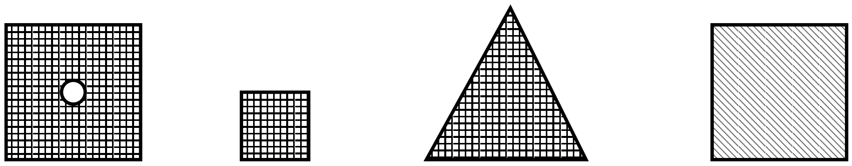


Рис. 1.4. Вместо того, чтобы искать, какой предмет здесь лишний, нужно по очереди самим «назначать» лишнего и потом объяснять, почему он лишний.

Схема «четвертый — лишний» и ее разновидности учень удобны для того, чтобы учить детей угадывать закономерности (эта грань математического мышления полностью игнорируется школьной педагогикой). Иногда удобнее брать восемь картинок, которые должны разделиться по выделенным признакам на две равные группы; именно такой схемой пользовался М. М. Бонгард в своей классической книге «Проблемы узнавания». К сожалению, и читатель с этим легко согласится, восемь картинок — это вдвое больше, чем четыре. А где их взять-то? За редкими исключениями, картинки для нашего кружка рисовала Алла; я сам рисовать совсем не умею, а она в свое время окончила художественную спецшколу.

И уж совсем трудные логические задачи получаются с пересекающимися классами. Например, пять картинок нужно разбить на две равные группы, по три картинки в каждой; при этом одна из картинок общая — она принадлежит обеим группам. Вот, например: мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка. Здесь три предмета из резины (мяч, шина, сапоги) и три предмета одежды (сапоги, пальто, шапка); общий элемент — сапоги. Отдельный вопрос: как чисто физически поделить пять картинок на две группы по три — не рвать же одну карточку пополам. Мы пользовались стандартным приемом: двумя веревочными кругами, в пересечении которых помещали общий предмет (на рис. 1.5 показан еще один пример аналогичной ситуации).

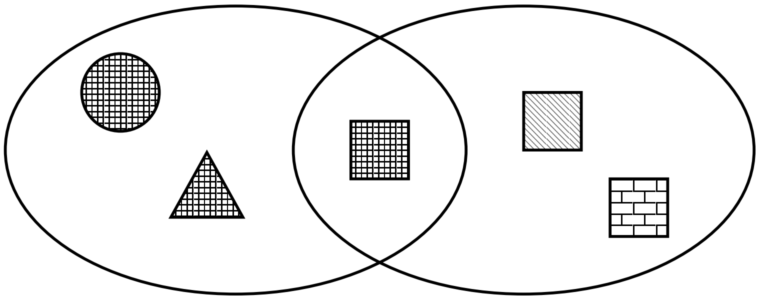


Рис. 1.5. Здесь изображены два множества по три предмета в каждом: одно состоит из трех красных предметов, другое — из трех квадратов. Красный квадрат является для них «общим»; математики говорят — «лежит в *пересечении*» этих множеств.

Для Димы этот класс задач явно представлял собой проблему (или это сам Дима представлял собой проблему?). «Это хоть и дядя, но похож на тетю», — говорил он про старика с бородой-лопатой и помещал его в общество женщин. Про автомобильную шину он долго доказывал нам всем, что это тоже одежда, так как ее можно носить на поясе. Когда же с ним никто не согласился, он сказал: «Всё равно это одежда, потому что ее надевают на автомобиль». Кто-нибудь скажет: вот, ребенок умеет мыслить творчески, нестандартно. Насчет «нестандартно» согласен, но вот творчески... Человек по-настоящему творческий умеет предложить неожиданное, нестандартное решение и при этом остаться в рамках задачи. Сложить шесть спичек колодцем — тут я согласен, это решение творческое. Счесть же бородатого старика тетей или автомобильную шину одеждой — нет. Очень часто у Димы присутствует первый компонент — нестандартность, а вот остаться в рамках задачи или хотя бы вблизи от них он пока не умеет. Надо как-то суметь, не подавив одно, развить другое. А как?

Наша следующая (и последняя на этот раз) задача — из области геометрии. Я извлекаю цветную детскую мозаику, купленную когда-то в магазине «Лейпциг» (увы, всего в одном экземпляре: в момент покупки мы еще не помышляли о кружке). Мозаика представляет собой прямоугольное поле с отверстиями. В них вставляются одинаковые по форме фишечки пяти разных цветов (рис. 1.6). Цвет фишек очень яркий, насыщенный, приятный для глаз. Наша задача — про симметрию. Сначала я выкладываю ось — одноцветную вертикальную линию, проходящую посередине поля. Я называю эту линию «зеркалом»; в это зеркало сейчас будут смотреться разные фигурки. Я строю с одной стороны от оси разнообразные небольшие фигурки, а мальчики должны построить симметричные им фигурки с другой стороны. Я варьирую всё, что можно: цвет, размер, расположение фигур. На следующих занятиях будет меняться также и расположение оси: сначала она станет горизонтальной, потом пойдет по диагонали. С помощью настоящего зеркала мы проверяем наши решения: оказывается ли за зеркалом то же самое, что мы видим в зеркале?

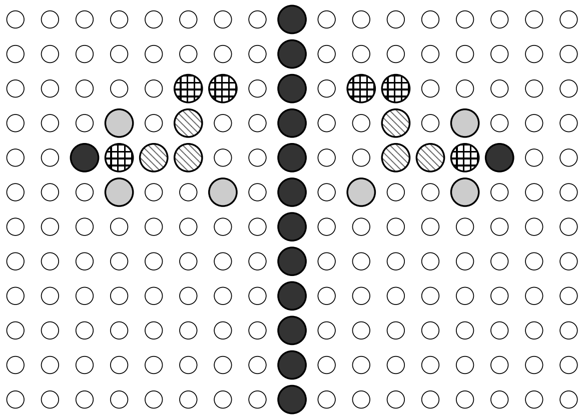


Рис. 1.6. Мозаика. Вертикальный ряд фишек посередине представляет собой «зеркало», или ось симметрии. Фигурку слева строит преподаватель; симметричную ей фигурку справа должен построить ученик.

Мальчики справляются с задачей на удивление легко, почти не допускают ошибок. Не могу понять, почему эта тема (осевая симметрия) вызывает трудности в шестом классе! Мы впоследствии посвятили ей много занятий. Симметрия в самом деле очень богатая тема, и к тому же красивая. Мы рассматривали картинки с симметричными узорами из книг по популярной математике. Мы рисовали симметричные фигуры разноцветными фломастерами на клетчатой бумаге; делали симметричные кляксы, складывая лист бумаги пополам; вырезали новогодние снежинки; находили ошибки в симметричных рисунках, в которых были специально сделаны кое-где нарушения, отклонения от точной симметрии; среди восьми карточек находили четыре симметричные и четыре несимметричные фигуры; у одной фигуры находили все возможные оси симметрии и т. д. Другие виды изометрий — центральная симметрия, поворот, параллельный перенос — оказываются для детей несколько более сложными, а вот осевая симметрия буквально идет «на ура».

А мозаика вскоре стала моим любимейшим инструментом. Это не игра, а настоящий клад всевозможных задач по геометрии, комбинаторике, логике, угадыванию закономерностей. А однажды она мне преподала незабываемый урок на тему о том, «что́ для детей важнее». Дело было так. Мальчики с удовольствием ходили на занятия, а иногда даже бывало так, что в ответ на мои слова «урок окончен» просили позаниматься еще. Я гордился собой — пока вдруг не заметил, что их просьбы продолжить занятие следуют только тогда, когда мы занимаемся с мозаикой. Я решил проверить свою догадку. Следующее занятие было без мозаики. Так оно и есть: говорю «урок окончен» — дети спокойно встают и расходятся. Меня охватили глубочайшие сомнения. Мозаика в самом деле очень красива, нет ничего удивительного в том, что ребятам нравится с нею играть. А моя математика, думал я, здесь ни при чём; я протаскиваю ее как обузу, как никому не нужный довесок, как нагрузку к интересной игрушке! На следующий раз я решил устроить решающий эксперимент. Мы опять занимаемся с мозаикой; опять мальчики не хотят заканчивать занятие; и тогда я говорю: «Нет, давайте мы урок всё-таки закончим, а с мозаикой я вам разрешаю поиграть просто так». В ответ следует единодушный вопль возмущения, и Петя резюмирует общую точку зрения в решительных словах: «Э, не-ет! Мы хотим задачку!!»

Вот так я понял, где лежит истина. Детям нужно полноценное интеллектуально-эстетическое удовольствие. Если одна из половин отсутствует, полноценность теряется, а с ней и ощущение праздника. Новогодняя елка без игрушек имеет в глазах детей так же мало притягательности, как игрушки без елки. Только когда они соединяются вместе, наступает праздник. Я надеюсь, что в будущем, через годы, когда мои ребята будут заниматься более абстрактной, «умственной» математикой, они будут получать от этого больше удовольствия, чем их сверстники. Ведь возникающие у них в уме абстрактные образы и понятия будут где-то на дне сознания эмоционально сливаться с «елкой», окрашиваться воспоминаниями о разноцветных задачах их детства.

Вот и сейчас — мы уже прошли два круга, т. е. каждый из ребят решил по две задачи на симметрию, пора бы уже кончать, но мальчики не унимаются, хотят еще. Мне кажется, что они уже устали. И я нахожу неожиданный выход: «Давайте теперь *вы* будете мне задавать задачи, а я буду их решать». Дети в восторге! С новым пылом они строят фигурки, а я — им симметричные. Работаю старательно. Вдруг в голову приходит еще одна идея: я начинаю нарочно делать ошибки. Петя первый это замечает; счастью детей нет конца. К ним как-будто пришло второе дыхание. Теперь они с горящими глазами, не отрываясь, следят за моей рукой, встречая каждую новую ошибку воинственными дикарскими кличами.

Но пора и в самом деле закругляться. Я отодвигаю мозаику, благодарю всех и объявляю занятие оконченным. «А когда же фокусы будут?», — вдруг вспоминает Андрюша. «Ну как же, Андрюша! Ведь ты сам и показывал фокусы! Пуговиц было не видно, они были спрятаны у меня в кулаке, а ты сумел их сосчитать». Сумел, правда, не он, а Женя, но Андрюша, видимо, об этом позабыл, потому что выглядит вполне удовлетворенным. Мы встаем. Я смотрю на часы: неужели прошло всего 25 минут? Сейчас дети разойдутся, а я останусь приводить в порядок свои мысли, придумывать новые задачи, новые подходы, приемы. И еще — клеить, вырезать, раскрашивать. Одним словом, готовить то, что в педагогике зовется скучным словом «дидактический материал». Ведь до следующего занятия — всего одна неделя.

Феномены Пиаже: реальность или обман зрения?

В этой книге я многократно возвращаюсь к так называемым феноменам Пиаже. Поэтому, думаю, надо сказать о них несколько вводных слов.

Великий швейцарский психолог Жан Пиаже (Jean Piaget) — безусловно одна из наиболее монументальных фигур в психологии XX века. За свою долгую жизнь (1896–1980) он написал около 50 книг и около 500 статей (точное их количество вряд ли знал даже он сам). В 1976 году отмечался весьма своеобразный юбилей: восьмидесятилетие со дня рождения Пиаже и семидесятилетие его научной деятельности. Именно так! Свою первую статью он опубликовал в возрасте 11 лет: он наблюдал в парке воробья-альбиноса и описал его в каком-то журнале.

В школьные годы Пиаже увлекается «малакологией» — наукой о моллюсках — и вскоре становится общепризнанным специалистом в этой области. Заочно, «по совокупности работ», ему предлагают весьма престижную должность смотрителя коллекции моллюсков в Женевском музее Натуральной истории. Мальчику приходится признаться, что он всего лишь школьник. К 20 годам он уже малаколог с мировым именем.

В этот момент он резко меняет направление своих занятий и переключается на детскую психологию. И уже к 30 годам становится признанным классиком детской психологии и автором пяти всемирно известных монографий. Дальше наступает весьма своеобразный этап. Эти пять монографий надолго заслонили дальнейшую деятельность Пиаже. При слове «Пиаже» у специалистов возникал своего рода автоматический рефлекс: «А-а, Пиаже, как же, как же, знаем! Знаменитые пять книг...». А между тем он продолжал двигаться вперед, и притом с не меньшим напором и всё с той же легендарной продуктивностью. Впрочем, и миру вскоре становится не до детской психологии. Фашизм, война, потом послевоенное восстановление... А в тихой нейтральной Швейцарии Пиаже продолжает свою работу. Где-то, по-видимому, в 50-е годы происходит осознание реального масштаба его вклада в науку.

Некоторое количество трудов Пиаже переведено на русский язык. Например, имеется сборник: Жан Пиаже «Избранные психологические труды» (М.: Просвещение, 1969). В нём можно найти и абсолютно нечитаемую теоретическую работу «Психология интеллекта», и книгу, от которой трудно оторваться: «Генезис числа у ребенка». Вообще, чтобы получить общее представление о его теории, лучше всего, по-моему, читать книгу Джона Флейвелла «Генетическая психология Жана Пиаже» (М.: Просвещение, 1967).

Характерно, что сам Пиаже считал себя не психологом, а *эпистемологом*, т. е. специалистом по теории познания. Эта наука призвана ответить на вопрос, каким образом мы можем вообще что-то *знать*. Если в поисках ответа мы хотим не просто переливать друг в друга пустые слова, а заниматься конкретными исследованиями, то у нас есть два пути: либо изучать историю познания — каким образом люди постепенно познавали мир; либо изучать, каким образом это происходит у маленьких детей. Пиаже пошел по второму пути.

Из всех многочисленных грандиозных конструкций, теоретических построений и экспериментальных исследований Пиаже наиболее широкую известность приобрели так называемые *феномены Пиаже*[1]. Я уже упоминал их выше. Маленький ребенок не понимает, что если переложить несколько предметов (камешков, кубиков, ...) иначе, то их число при этом не изменится. Тем самым и само понятие числа остается для него недоступным, хотя он, быть может, и умеет «считать до ста». Потом ребенок подрастает, и вместе с этим приходит осознание вышеуказанного закона сохранения. Но всё равно приходится ждать еще года полтора—два, пока он не осознает аналогичный закон для непрерывных количеств: если раскатать шарик пластилина в колбаску, то количество пластилина останется тем же; если перелить воду из стакана в миску, то количество воды тоже не изменится. А также и многочисленные «смежные» закономерности — типа того, что если есть два одинаковых количества, и от одного из них забрали больше, а от

[1]Вот (неполный) список других сюжетов, которые он изучал: логика, время, движение и скорость, пространство, геометрия, случайность, восприятие, рассуждения подростков, воображение, речь, нравственные суждения ребенка, причинность, классификация и многое другое.

другого меньше, то *там, где забрали больше, осталось меньше*. Во всё это трудно поверить, настолько указанные принципы кажутся нам самоочевидными.

В этом замечательном открытии самым поразительным мне представляется то, что для него не нужны были ни космические ракеты, ни синхрофазотроны, ни лазеры. Оно в буквальном смысле «вертелось у всех под ногами». Не обязательно было дожидаться XX века: Платону и Евклиду оно было так же доступно, как и нам. Но — не пришло в голову. Потребовался интерес к познавательной функции человека, правильная постановка вопроса, недюжинная наблюдательность, ну и, разумеется, обширный эксперимент. Интересно, однако, что феномены Пиаже встретили также и мощнейшее сопротивление ученого сообщества. До сих пор, по прошествии многих десятилетий, вы встретите людей, которые при их упоминании только рукой махнут: мол, глупости всё это. Ведь мы же задаем ребенку вопрос посредством *слов*, не так ли? Мы спрашиваем, где *больше*, где *меньше*, где *поровну*. А кто и когда объяснял ему смысл этих слов, их, если угодно, семантику? Просто он их не так понимает, как мы, вот и всё. Лучше всего эту идею выразил один мой знакомый математический логик: «Ведь ты же не дал им *определения* слова “больше”. Вот они и понимают его по-своему. Они считают, что “больше” — это значит, что ряд длиннее». Что тут можно возразить? В самом деле, определения не давал. А что же я должен был сказать? Что существует биекция между одним множеством и собственным подмножеством другого множества? Никаких вопросов это не снимает: откуда же знать, что если такая биекция нашлась один раз, то найдется и в другой раз? Видимо, надо было доказать такую лемму... Я спорю, но сам чувствую, что вяло. Вот, мол, в опытах вместе с детьми взвешивали куски пластилина до и после раскатывания в колбаску... Ну и что, что взвешивали! Ребенок же не знает, как устроены весы и что означают их показания.

Этот спор можно вести до бесконечности: выхода из заколдованного круга не существует. Как бы мы ни общались с ребенком, в какой бы форме ни ставили ему вопрос, всегда будет существовать некое промежуточное звено, некоторый «носитель сигналов», будь то слова, весы или арифметический подсчет. И всегда можно свалить всю вину на то, что этот «интерфейс», этот «протокол обмена» недостаточно формализован: мы толкуем его одним образом, а ребенок другим. Можно, правда, спросить у наших оппонентов, почему в семь лет ребенок уже правильно отвечает на все вопросы, хотя никаких определений ему по-прежнему никто не давал. Но в серьезном научном споре такой прием — «а как вы тогда объясните, что...?» — недопустим. Критик не обязан что-либо доказывать или объяснять — эта обязанность целиком возлагается на автора теории. Разумеется, в той мере, в какой в психологии вообще возможны доказательства.

Не вдаваясь в философские глубины этого спора, хочу сообщить мое собственное мнение на этот счет. После многих лет работы с детьми никакие доказательства мне больше не нужны. Я *знаю*, что Пиаже прав. Я наблюдал его феномены столько раз и в таких разных обстоятельствах, порой спровоцированных мною, порой совершенно спонтанных, что убеждать меня больше не надо. Помню, например, как собрались гости и не хватило одного стула. Дима — тогда трехлетний — стал предлагать разные способы, как их можно было бы пересадить. И каждый раз оказывалось, что снова не хватает одного стула. Достаточно было видеть его озадаченную физиономию, чтобы признать: дело тут вовсе не в семантике слова "больше". (Но я бы, разумеется, не обратил на это внимания, если бы Пиаже не подсказал.)

Психологи потратили немало сил и изобретательности, пытаясь научить детей законам сохранения (или, с точки зрения наших оппонентов, объяснить им точный смысл задаваемых вопросов). Результат, как правило, был нулевой. (Об одном — весьма относительном — успехе я расскажу чуть ниже.) Но больше всего мне понравилась вот какая история. Из большой группы испытуемых всё же удалось выделить некоторое количество детей, которые, судя по всему, «всё поняли». По крайней мере, на все вопросы экзаменаторов они отвечали правильно: «Пластилина осталось столько же, потому что мы к нему ничего не прибавили и не убавили. Мы только изменили его форму, и всё». И тогда исследователи сделали еще один шаг. Они попытались детей *разучить*. Ответит ребенок правильно, взвесят они вместе со взрослым пластилиновую колбаску — ан нет: она стала легче! Это зловредный экспериментатор незаметно для ребенка отщипнул от нее кусочек. И вот оказалось, что те дети, которые легко научились, так же легко и разучились. Они стали отвечать, что, мол, пластилина стало меньше, потому что мы раскатали шарик в колбаску. А вот тех детей, которые знали закон сохранения еще до эксперимента, знали сами по себе, разучить почему-то не удавалось. В тех же обстоятельствах они говорили: «Наверно кусочек упал на пол, а мы не заметили».

Ну, хорошо: если так трудно, а то и вовсе невозможно научить ребенка понятию числа, то чего я, собственно, добиваюсь? В чём цель и смысл моих занятий? Я уже говорил об этом, и буду повторять не раз: смысл занятий — в самих занятиях. В том, чтобы было интересно. В том, что ставить перед собой вопросы и искать на них ответы. В общем, это такой *образ жизни*.

* * *

Чтобы закончить этот раздел, расскажу еще пару историй. Первая из них относится к моему собственному детству. Не знаю, сколько мне было лет; видимо, что-то около пяти. Мы жили в Витебске. Во дворе нашего дома жил один старик, который любил время от времени поговорить с детьми. Я был «умненький мальчик», и про меня было известно, что я умею считать. Вот однажды он и предложил мне умножить 3 на 5. Я уже знал, что умножить — это значит сложить с собой нужное количество раз. И я пустился в это опасное и полное приключений плавание. Сначала $3 + 3$; это будет 6, и это пока легко. Идем дальше: $6 + 3 = 9$; это лишь незначительно сложнее, но главное — не сама операция; главное — это не забывать, сколько раз я уже сделал сложение. Теперь начинается самый трудный момент: $9 + 3$. Это, во-первых, переход через десяток, а во-вторых и снова — как бы не упустить, сколько раз я уже сложил... И уже почти приходя в отчаяние, на последнем пределе своих умственных возможностей, я сложил 12 и 3 и сказал: «Пятнадцать». — «Правильно! — ответил старик. — А как ты считал?» Я объяснил. «Зачем же так сложно? — удивился он. — Можно было просто сложить $5+5+5$». — Я был совершенно сражен и одновременно сбит с толку. Сложить $5+5+5$ — это проще простого: $5+5 = 10$ (тривиально), и $10 + 5 = 15$ (тоже тривиально). И, что самое удивительное, в результате в самом деле получается 15. Но почему!!?

Эта событие надолго запало мне в память. Я искал объяснения — и не находил. В школе я узнал, что в шестом классе начнется алгебра, и там будут *формулы*. Детям редко приходит в голову мысль, что можно заглянуть в учебник за будущие классы. И я терпеливо ждал шестого класса, надеясь, что тогда-то и придет долгожданное просветление. В шестом классе я написал формулу $ab = ba$, долго и тупо смотрел на нее, но никакого просветления так и не произошло. В девятом классе я попал в знаменитый Колмогоровский физико-математический интернат при Московском университете. Программа там была продвинутой; мы довольно быстро перешли к изучению групп, полей и колец. «Господи, какой же я был глупый, — решил я. — Ведь это же просто-напросто *аксиома*, и называется она *коммутативностью*. А аксиомы не доказывают». Время шло, и я еще слегка поумнел. Я понял, что аксиома-то она аксиома, но ввели ее не потому, что кто-то так распорядился, не по чьему-либо капризу, а потому что это свойство реально выполняется при умножении натуральных чисел.

(Заметим здесь в скобках, что, например, возведение в степень — т. е. «повторяющееся умножение» — вовсе не коммутативно. Умножьте 5 само на себя 3 раза, а потом умножьте 3 само на себя 5 раз, и результаты получатся совершенно различные. А вот для «повторяющегося сложения» почему-то получается одно и то же.)

И уж не помню сейчас, когда и почему я осознал, что речь идет просто о том, чтобы по-разному сосчитать одно и то же множество предметов. Мы берем «сколько-то» камешков и выкладываем их в три ряда по пять штук; а это то же самое, что выложить их в пять рядов по три штуки — смотря что считать рядом (рис. 1.7). Так значит, всё дело в том, что если одни и те же предметы считать в разном порядке, то результат должен получиться один и тот же! И, значит, не так-то уж это свойство и очевидно, если его осознание потребовало стольких лет и стольких умственных усилий.

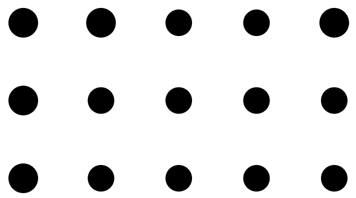


Рис. 1.7. Здесь 3 горизонтальных ряда по 5 кружков в каждом, т. е. всего $5 \cdot 3$. Но можно также и сказать, что здесь 5 вертикальных рядов по 3 кружка в каждом, т. е. всего $3 \cdot 5$. Если верить в то, что как ни считай, получишь одно и то же, то следует заключить, что $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

И в заключение — еще одна сценка. Точнее, подслушанный диалог. Участников двое — муж и жена; оба пенсионеры, обоим около 80 лет. Поэтому речь и движения персонажей происходят в замедленном темпе. Жена собирается готовить на ужин яичницу. Неожиданное препятствие: сковородка, в которой она обычно это делает, осталась непомытой после обеда. «Митя, большая сковородка грязная». Муж — с оттенком раздражения, так как его оторвали от его занятий: «Сделай в маленькой». — «Так я боюсь, что мало будет. . .» Муж — слегка поразмыслив над этим обстоятельством и пожимая плечами: «Тогда помой большую».

А как же закон сохранения количества вещества?!

Очень легко себе представить иные обстоятельства. Тем же самым двум старичкам дается формальный «тест на интеллект». Вопрос: если разбитые яйца перелить из одной сковородки в другую, то содержимого станет (а) больше; (б) меньше; (в) останется столько же; (г) результат операции зависит от размера сковородок. Я нисколько не сомневаюсь, что в этом случае ответ был бы правильным. И это наводит на разные вопросы, которые я даже затрудняюсь отчетливо сформулировать. Вопросы, во-первых, о соотношении между формально выученным и реально усвоенным. И, во-вторых, о том, в какой степени мы в нашем повседневном поведении руководствуемся «правильными рассуждениями», и в какой — некой наглядной «видимостью», тем, что «кажется глазу». (Видите, как много здесь кавычек (а также и скобок)? Это всё оттого, что не получается у меня выразить свою мысль «коротко и ясно».)

О пользе чтения книг по психологии

Математиков не всегда легко убедить в том, что книги по психологии представляют хоть какой-нибудь интерес. Их там смущает всё: и терминология, и уровень доказательности, и сами постановки задач. Я помню один диалог, оборвавшийся в самом начале. Я стал рассказывать молодому студенту об одной серии экспериментов. «Вот, например, — сказал я — такой вопрос: способен ли двухмесячный младенец обучаться?» В ответ мой собеседник только хмыкнул. «А что, разве это не очевидно? Спросили бы у меня, я бы им сразу сказал».

Что тут можно возразить? Ну конечно же может, это и в самом деле всем очевидно. Аналогичным образом отреагировал один мой знакомый француз на известие о том, за что была присуждена очередная Нобелевская премия по экономике. Ее получатель доказал, что экономическое поведение людей не является рациональным, логичным. «Мог бы спросить у моей консьержки», — пожал плечами француз.

Я чувствовал, что мой студент неправ, но возражение сумел придумать только много позже. Давайте зададим себе вопрос из другой области: одинаковы ли законы физики в разные моменты времени и в разных точках пространства? Ответ, пожалуй, столь же очевиден, как и в предыдущем случае. Любой философ скажет вам, что да, одинаковы, ибо иначе их просто не следует считать законами физики. И он, конечно, прав. Ну, а что скажет не философ, а физик?

Положение физика более сложно: он обязан иметь дело не с общими словами, а с конкретными законами — скажем, с какими-нибудь там уравнениями Максвелла. Расплывчатую фразу про разные моменты времени и разные точки пространства тоже следует конкретизировать, объяснив, что и как меняется при переходе от одной системы координат к другой. Доведите эту идею до конца — и вы откроете сначала преобразования Лоренца, а потом и теорию относительности Эйнштейна. А ведь это только первый шаг: уравнения Максвелла описывают электромагнитные взаимодействия, а существуют и иные: слабые, сильные, гравитационные. Уже в течение нескольких веков, начиная с Галилея, физики пытаются придать конкретную форму «очевидному» философскому принципу об одинаковости законов в пространстве и во времени, и путь еще далеко не закончен. Где-то на горизонте маячит «единая теория поля».

Итак, корень проблемы в том, чтобы задавать вопросы не в общефилософских терминах, а говорить о конкретных наблюдаемых и проверяемых в опыте явлениях. Конечно, до формул и уравнений психологии далеко. Тем не менее — давайте вместо вопроса о том, «может ли ребенок обучаться», спросим о чём-нибудь более конкретном. Ну, например, так: может ли он в возрасте двух месяцев запомнить последовательность из четырех битов? Скажем, такую: 0011? По сравнению с исходным глобальным вопросом звучит несколько убого, но ведь даже и на такой примитивный вопрос дать *экспериментальный* ответ не так уж просто.

Первая трудность: каким образом мы можем узнать, что ребенок в самом деле усвоил переданную ему информацию «0011»? Это пока еще не очень сложно. В рамках доступных ему действий можно, скажем, проверить, может ли он повернуть голову два раза влево и затем два раза вправо для того, чтобы добиться какой-нибудь цели.

Вторая трудность, на этот раз гораздо более существенная: какую цель можно ему предложить, и как сделать так, чтобы он захотел ее добиться? Чем можно его заинтересовать? В опытах над животными поступают просто: их, извините, морят голодом. Доводят вес подопытного животного до 80% нормального, и тогда в поисках пищи оно демонстрирует чудеса интеллекта. С детьми, слава Богу, так никто не поступает. А тогда что?

В психологии часто так случается, что главное открытие совершается не на дороге от вопроса к ответу, а где-то сбоку. Так и здесь: именно ответ на последний вопрос открывает нам глаза на какие-то новые истины. Исследователи испробовали множество разных «привлекательностей»: яркие погремушки, музыкальные перезвоны, порою целые фейерверки. Оказалось, что вполне достаточно обыкновенной лампочки. Единственным же настоящим стимулом для ребенка является сама *возможность обучаться*!

Дело происходит примерно так. Малыш случайно обнаруживает, что когда он поворачивает голову влево, загорается лампочка. Несколько раз он «подтверждает» свое наблюдение; потом успокаивается, и лишь время от времени, через сравнительно долгие промежутки, проверяет, всё ли в порядке. В какой-то момент вдруг оказывается, что нет, не всё в порядке: лампочка больше не загорается. Он начинает активно искать причину — до тех пор, пока не обнаруживает, что чтобы ее зажечь, нужно повернуть голову один раз направо и один раз налево. Наступает очередная серия подтверждений и очередной период успокоения. И снова вдруг выясняется, что лампочка не реагирует на «приказ». Опять следует активный поиск — и очередное решение. И так далее, вплоть до 0011. (Описание этого эксперимента заимствовано из книги Т. Бауэра «Психическое развитие младенца», М.: Прогресс, 1985.)

Вот ведь оно, оказывается, как обстоит дело. Главным стимулом для учебы является не награда, не «обобщенная конфета» после урока, а сама учеба, сама возможность узнавать новое. От нас требуется только не растоптать, не подавить эту устремленность к новому знанию, а также, наверное, создать ребенку достаточно разнообразную среду, чтобы его интерес к окружающему миру не ослабевал. И здесь психология тоже может дать нам в руки совершенно неожиданные ключи. Цитирую из книги В. С. Ротенберга и В. В. Аршавского «Поисковая активность и адаптация» (М.: Наука, 1984):

> Американские ученые Джонс, Нейшн и Массад исследовали четыре группы испытуемых. На начальном этапе исследования первая группа получала задачи, ни с одной из которых не могла справиться (0% успеха). Вторая группа получала задачи, каждую из которых удавалось решить (100% успеха); испытуемые третьей группы справлялись с каждой второй из предъявленных задач (50% успеха). После этого испытуемым всех трех групп и четвертой контрольной предъявляли серию принципиально нерешаемых задач, т. е. пытались выработать у них обученную беспомощность. На завершающем этапе исследования всем испытуемым предлагались средние по трудности, но решаемые задачи и выяснялась эффективность предшествующей серии. Оказалось, что иммунизация к обученной беспомощности создавалась только у испытуемых третьей группы. Именно они лучше всего решали задачи на завершающем этапе. Первая, вторая и контрольная группы существенно между собой не различались. Наиболее интересно в этих результатах то, что и стопроцентный успех и стопроцентная неудача в одинаковой степени не повышали устойчивость испытуемых к последующей неудаче.

Очень сходные результаты получаются в опытах и над детьми, и над щенками, и над крысятами. Наводит на размышления, не правда ли? До сих пор расстраиваюсь, что мне так и не удалось рассказать обо всём этом студенту.

Мы хотим, чтобы наши дети выросли умными и развитыми, не так ли? Что мы должны для этого делать?

В книге Ури Бронфенбреннера «Два мира детства. Дети в США и СССР» (М.: Прогресс, 1976) автор рассказывает об одном проекте, получившем впоследствии название «тридцатилетний эксперимент». Речь в нём шла о том, чтобы «вывести в люди» умственно отсталых детей, содержащихся в специальном приюте, добиться того, чтобы они могли жить самостоятельно.

Эксперимент состоял из многих этапов, но наиболее трогательным, если не душераздирающим, был самый первый из них. Каждого ребенка прикрепили к своего рода подставной суррогатной «маме»; такими мамами служили умственно отсталые женщины, содержащиеся в том же приюте. Через два года специальные измерения показали, что уровень интеллекта у детей вырос в среднем на 20–30 пунктов; в то же время уровень интеллекта у детей контрольной группы снизился. На меня сильнейшее впечатление произвел тот факт, что эти мамы явно не могли вести со своими детьми какие бы то ни было развивающие занятия. Никаких математических кружков, никаких головоломок, никаких интеллектуальных игр. Всё, что они могли — это обнимать детей, целовать, пеленать и вообще всячески с ними тетешкаться. И вот, оказывается, что по крайней мере в определенном возрасте эмоциональное тепло, родительская ласка гораздо важнее для развития ребенка, и в том числе — особо это подчеркиваю — для развития его *интеллекта*, чем любые другие формы деятельности и обучения. Родители, не забывайте об этом!

Не следует превращать эту книгу в психологическое попурри (к тому же не очень квалифицированное). Но я всё же вернусь еще раз к феноменам Пиаже и перескажу один опыт, который — единственный — привел к частичному успеху и к усвоению закона сохранения. Речь идет о «познавательных конфликтах» Яна Смедслунда (они описаны, в частности, в упоминавшейся выше книге Джона Флейвелла). Цитирую:

> Если, например, данный испытуемый был склонен полагать, что удлинение шарика увеличивает количество пластилина, а убавление кусочка уменьшает его количество, экспериментатор производил сразу и ту, и другую операцию [...] Подобная процедура была выбрана для того, чтобы *заставить испытуемого приостановиться, заставить его колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями* [выделено мной — А. З.]; автор ожидал, что в результате ребенок будет медленно склоняться к более простой и последовательной схеме убавления-прибавления [...]

Весьма характерно, что в этих опытах ребенку ничего не объясняли и ничего не проверяли на весах. «Научить» удалось четырех детей из тринадцати, и «разучить» их обратно потом не удалось.

Я знаю за собой такое свойство — делать далеко идущие выводы при недостаточных основаниях; а также и порой противоречить самому себе (совсем недавно твердил, что нет у нас такой цели — научить ребенка законам сохранения, и вдруг вроде бы пытаюсь объяснить, как это можно было бы сделать). Неважно! Я хочу возвести в принцип, в основу моей педагогики вот эти слова: *заставить приостановиться, заставить колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями*. Этот подход я противопоставляю другому, который исходит из того, что интеллект — это умение быстро решать головоломки. Рискуя уже в который раз впасть в возвышенный тон, я бы сказал: наша цель — воспитание такой породы людей, которую можно было бы назвать *человек задумывающийся*.

Конкретные примеры будут дальше.

Как относиться к теориям

Передо мной увлекательнейшая книжка со скучным названием «Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ». Авторов пятеро: В. Н. Тутубалин, Ю. М. Барабашева, А. А. Григорян, Г. Н. Девяткова, Е. Г. Угер; лидером команды несомненно является Валерий Николаевич Тутубалин, известный математик, а также и известный критик применений математики в других науках. Вроде бы тема не имеет отношения к тому, что мы здесь обсуждаем. Но именно в этой книге я впервые нашел четкую формулировку того, что долго и безуспешно пытался высказать сам — того, как следует относиться к теоретическим построениям. По отношению к психологии это, мне кажется, еще более верно (и важно), чем по отношению к экологии.

Среди прочего в книге рассматриваются также классические уравнения Лотки—Вольтерра. Исходная идея достаточно проста. Имеются, скажем, лисы и кролики, причем лисы поедают кроликов. Последних становится всё меньше, и у лис возникает дефицит еды. Теперь уменьшается численность лис; жизнь у кроликов становится менее опасной, и теперь уже их численность возрастает. У лис изобилье еды, и их количество начинает расти; число кроликов опять падает, и всё начинается сначала. Эта модель довольно легко переводится на язык дифференциальных уравнений. Удача: уравнения решаются в явном виде (редкий в этой теории случай), и получаются аккуратные циклы на фазовой плоскости и аккуратные колебания, если рассматривать обе численности как функцию времени.

Теория готова; теперь надо ее проверять экспериментально. Натурные эксперименты, т. е. измерения численностей видов (не обязательно лис и кроликов, но любых двух видов, один из которых поедает другой, например, щук и карасей) в живой природе, прямо скажем, ни к чему разумному не приводят. Это и понятно: слишком много вмешивается посторонних факторов. Попытки как-то выделить и учесть влияние этих факторов оказываются слишком сложными и в итоге неубедительными. Есть еще возможность проведения лабораторного эксперимента, где все факторы строго контролируются, да и виды выбираются такие — вроде дрожжей — с которыми гораздо легче иметь дело, чем со зверями. Но даже и в этом случае статистическая обработка данных проведена не очень квалифицированно (это 30-е годы, математическая статистика только создавалась), и придти к определенным выводам трудно. В районе Гудзонова залива даже было обнаружили колебания численности зайцев и рысей. Но вот беда: циклы на фазовой плоскости крутились в другую сторону — как если бы хищниками были зайцы, а жертвами — рыси. Статья на эту тему саркастически называлась «Едят ли зайцы рысей?»

Одним словом, подтвердить теорию на опыте не удается. Каков же вывод? Выбросить ее в корзину? Некоторые философы — критики науки — считают именно так. Но авторы книги — не философы, а работающие ученые, и они приходят к совершенно противоположным выводам. Ничего подобного, говорят они. В процессе попыток подтвердить (опровергнуть, уточнить, развить, видоизменить) теорию Лотки—Вольтерра специалисты произвели множество весьма полезных измерений и приобрели совершенно бесценный опыт. Он, быть может, и не выражается в виде простых уравнений; но всё же сегодня экологи знают гораздо больше, чем в 20-х годах прошлого века. Без этого исходного толчка они просто не знали бы, с какого конца приниматься за дело, что и зачем измерять. Они так до сих пор и оставались бы на уровне общих деклараций типа «всё в природе взаимосвязано».

Следует только иметь в виду, что каждый автор концепции вкладывает в свое детище так много души, что потом уже верит в нее как в Священное Писание. Хорошо мне, дилетанту: я могу жонглировать разными, в том числе и противоречащими друг другу теориями, могу сам изобретать новые на пустом месте (или почти) и назавтра отрекаться от них. Среди психологических теорий есть такие, которым я стопроцентно доверяю: примером являются феномены Пиаже. Есть такие, в которые я не верю ни на грош; к ним относится, в частности, распространенная в нашей стране «теория поэтапного формирования умственных действий», а также то, как тот же Пиаже объяснял освоение ребенком родного языка (читайте на эту тему превосходную книжку: Steven Pinker «The Language Instinct: How the Mind Creates Language»). Но если относиться к теориям без прозелитизма, то интересны они все, так как все дают пищу для ума — и материал для задач!

Авторы книги об экологии рассказывают нам такую историю-притчу. Небольшая группа путешествует по берегам и островам Белого моря. Знающие люди сказали, что на некотором острове имеется пресноводное озеро, в котором окунь прекрасно клюет на макароны. А может, мы как раз на этом острове? Как же пройти к озеру? Идти напролом по карельской тайге, перемежаемой горами и болотами — небольшое удовольствие. Идея («теория»)! Вода из озера должна куда-то деваться; наверное, из него выпадает ручей; а вдоль ручья может идти тропа. Идем вдоль берега моря; и в самом деле, вскоре обнаруживается ручей, а вдоль него — тропа. Всё прекрасно! Поднимаемся по тропе вдоль ручья. Вскоре, однако, ручей исчезает вовсе, тропа вместе с ним, «и лезем мы куда-то на высокую гору, с которой ничего, кроме леса, не видно. Некоторое время бродим без цели и смысла, вдруг каким-то образом попадаем на тропу, которая и выводит к озеру». И окуни там в самом деле великолепные! Мораль: *теория нужна не для того, чтобы правильно отражать реальность, а для того, чтобы начать что-то делать — а дальше видно будет.* (Хотя, как отмечают авторы в другом месте, правильная теория всё же лучше, чем неправильная.)

Так что пора и мне «начать что-то делать» и от болтовни на общие темы вернуться к нашему кружку.

Глава 2.

Кружок с мальчиками — первый год

Как я уже упоминал неоднократно, я начал вести кружок в марте 1980 года, но записывать содержание занятий стал только с февраля 1981 года. Первые 20 занятий «для вечности» утеряны, тут уж ничего не поделаешь; собственно дневник начинается с 21-го занятия.

Важное пояснение. К каждому из занятий предпослан заголовок; но его не следует воспринимать слишком серьезно. На занятии обычно бывало несколько разных задач, а заголовок отражает лишь одну из них, чаще всего основанную на новой идее или примечательную по какой-то иной причине. Иногда, впрочем, он связан вообще не с задачей, а с каким-то происшествием или новым поворотом событий.

Занятие 21. Лист Мёбиуса

4 февраля 1981 (среда) $10^{30} - 11^{00}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Задание 1. На их глазах разрезал лист на 4 полоски, из которых мы склеили (с моей помощью) 4 листа Мёбиуса.

> Для читателя-нематематика должен пояснить, что такое лист Мёбиуса. Если взять узкую длинную полоску бумаги и склеить ее концами «обычным способом», то получится цилиндр: он показан на рис. 2.1 слева. Если же предварительно перевернуть один из концов на 180°, получится фигура, показанная на том

же рисунке справа. Она и называется листом Мёбиуса. У цилиндра есть две поверхности — внешняя и внутренняя; их можно, например, покрасить в два разных цвета. А вот у листа Мёбиуса только одна поверхность. Попробуйте закрасить каким-нибудь цветом его внутреннюю сторону — и вы незаметно перейдете на внешнюю.

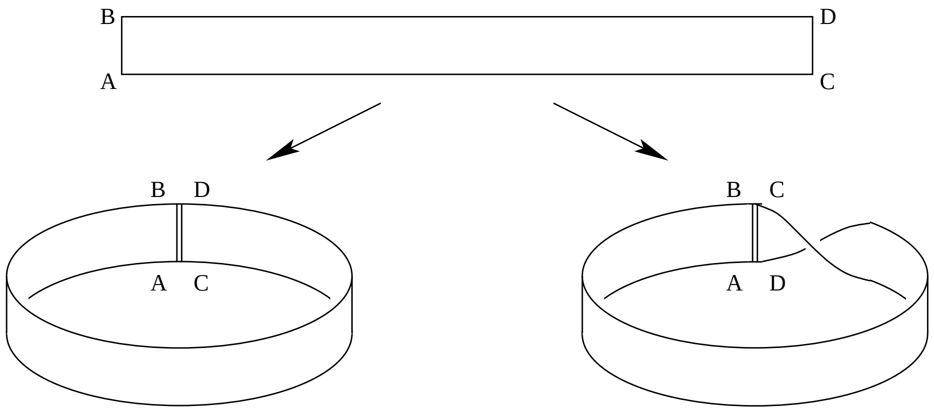


Рис. 2.1. Два способа склеить концы бумажной полоски. Слева — обычный цилиндр, справа — лист Мёбиуса.

Себе склеиваю обычный цилиндр (для сравнения). Два муравья соревнуются — у кого домик интереснее (или кто сумеет то-то и то-то).

На одном из листов (Диминого) показываю, как муравей полз по одной стороне, а попал на другую. На другом (Женином) показываю, как муравей полз по краю и оказался на другом краю.

[Надо было более медленно и спокойно дать им убедиться (каждому на своем листе), что есть всего одна сторона и всего один край.]

Разрезаю по средней линии цилиндр, затем лист Мёбиуса. Оба раза прошу угадать, что получится. Потом полученную штуку снова разрезаю по средней линии, опять прошу угадать.

[Во второй раз вместо средней линии можно резать на расстоянии 1/3 ширины от края: в этом случае зацепление лучше видно.]

Показываю шарик, как он склеен из двух половинок; объясняю, что край исчезает. Потом показываю, как из двух резиновых трубок склеивается тор (у него тоже нет края). Рассказываю, что будет, если склеить два листа Мёбиуса по краю (края не будет, но можно перейти с внешней стороны на внутреннюю). Впечатления не производит. Рассказываю про молоко, которое было внутри, а стало снаружи. «Ну и что? Просто пролилось».

[Надо было сказать, что при этом оно нигде не переливалось через край, так как никакого края вообще нет.]

Задание 2. Сколько стоит билет в метро, в автобусе, в троллейбусе, в трамвае?[1] Какие автоматы стоят в метро? (Принимают только пятаки и пропускают внутрь. Билетов в метро не бывает.) Какие автоматы бывают в автобусе? (Пять копеек в любом наборе — билет.)

Теперь нам с вами надо сложить пять копеек самыми разными наборами. (Монеты выкладываются на стол отдельными кучками. Чтобы один участник мог выложить 5 копеек всеми возможными способами, ему потребуется

$$1 \times 5\,\text{коп.} + 2 \times 3\,\text{коп.} + 4 \times 2\,\text{коп.} + 11 \times 1\,\text{коп.})$$

Задание было выполнено менее успешно, чем я ожидал (долго не понимали, что требуется; ошибались в счете; повторяли уже имеющиеся комбинации; зацикливались на определенной группе монет; не могли найти нужную монету, так как искали в одной и той же кучке: «А мне все единички попадаются!»).

◁ По моему, я видел, что Жене «всё единички попадаются» из-за того, что он ищет не в той кучке. Я не знал, говорить ему или нет, и эта мысль отвлекала столько внимания, что я не замечал, что сам не могу найти нужную монету по той же причине. — Дима. ▷

[Надо было начать с трамвая, потом перейти к троллейбусу и уже потом к автобусу. Еще лучше — начать с телефонного автомата (2 копейки).]

Занятие 22. Что больше, целое или часть?

14 февраля 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{20}$ (45 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

Задание 1. **Вопрос Диме:** «Чего больше — зайцев или зверей?» Ответ: «Зверей». — «Почему?» — «Потому что *кроме зайцев* (выделено мной) бывают еще попугаи, волки, кошки, собаки и т. д.» (Обсуждение того, что попугаи — не звери.) Я даю свое объяснение: «Ведь зайцы — это тоже звери».

Вопрос Андрюше: «Чего больше — гусей или птиц?» Андрюша объясняет, что больше птиц, так как они водятся повсюду — в Индии, в Грузии и даже на Северном полюсе. Таким образом, заимствована внешняя схема

[1] Боюсь, что читатели уже забыли, сколько стоили билеты в ту эпоху: автобус и метро — 5 копеек, троллейбус — 4 копейки, трамвай — 3 копейки.

Диминого ответа (что разных птиц очень много), но пропущен центральный момент: «кроме». Я: «Но ведь гусей тоже очень много (рассказываю, где водятся гуси). Может быть всё-таки гусей больше, чем птиц?» — Андрюша не знает.

Вопрос Жене: «Чего больше — мужчин или людей?» Женя считает, что больше людей, но объяснить не может. Правильно объясняет Дима: «Потому что мужчины — это тоже люди. Это двойные люди». (Обсуждение, являются ли дедушки и папы мужчинами).

Вопрос Пете: «Чего больше — мух или насекомых?» — «Мух». — «Почему?» — «Потому что они повсюду летают». — «А насекомые не повсюду?» — «Нет». — «А мухи — это тоже насекомые или нет?» — «Насекомые». (Снова обсуждение того, что не все насекомые умеют летать). Таким образом, правильно отвечал только Дима. Но, как показало четвертое задание, и он понятие включения классов еще до конца не освоил.

Задание 2. Продолжение вопросов (в третий раз) про мальчиков и девочек в очках и без очков — еще четыре вопроса, по одному на каждого из ребят.

> В этой задаче детям предлагаются карточки, на которых нарисованы мальчики и девочки, причем некоторые из них в очках, другие без очков. Требуется ответить, правильны или нет утверждения типа «все дети в очках — мальчики», «имеется девочка без очков» и т. п. Любой из этих вопросов (которых можно сочинить немало) можно задавать про любую карточку, так что эта задача весьма изобильна, ею можно заниматься долго.

Петя заметил, что у него и у Жени оказались одинаковые картинки, Е и Г. Алла подсказывает, что и утверждалось одно и тоже: «нет ни одной девочки без очков» и «все девочки — в очках» — это эквивалентные утверждения. Андрюша справлялся с заданием слабее других и всё время объяснял что-то про мальчиков, хотя его вопрос был о девочках. Причина в том, что он не был на тех занятиях, когда это задание было первые два раза.

Самостоятельно (т. е. без моей помощи) справился с заданием один Дима. Но у него и вопрос был легче: про всех детей, а не про мальчиков или девочек.

Снова немного пообсуждали проблему пустого множества. [Это вот о чём: спрашивается, верно ли для данной картинки, что «все девочки — в очках», а девочек на ней вовсе нет. Ребята, совершенно естественно, отвечают, что, мол, нет, неверно. «Ах, вот как? — говорю я. — Тогда покажите мне девочку без очков». — «Но здесь вообще нет девочек!» — «Вот я и говорю, что все, которые есть — в очках». — «Но их нет никаких!» — «А я и не говорю, что есть. . . » И дальше в том же духе.]

Смешная сценка вначале: когда я только вынул карточки, все, перебивая друг друга, закричали, показывая на них: “Blue! Yellow! Brown! Grey!” Я, воспользовавшись моментом, спросил: “Is it a boy or a girl?” — “It’s a boy”. (Андрюша шутит.) — “No, Andrew, that’s not true. It’s a girl”.[2]

Задание 3. Все дети получают по карточке вроде той, что показана на рис. 2.2 (все карточки разные). Нужно догадаться, какой фигурки не хватает.

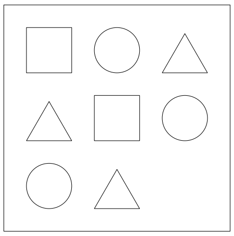


Рис. 2.2. Какой фигурки не хватает?

Первым догадывается Андрюша. Я спрашиваю, как он догадался, он объясняет. Услышав это, все остальные тоже решают задачу, но Дима решает неправильно (кажется, Женя решил сам, без подсказки). Я указываю Диме ошибку: «Смотри, здесь в каждом ряду есть все три фигурки, а в тех, которые ты нарисовал, квадратиков два, а треугольника вообще нет». Мы еще раз обсуждаем общий принцип построения узора. Дима исправляет ошибку.

Теперь каждый получает еще по одной такой же карточке, но пропущена фигурка не а правом нижнем углу, а в более трудном месте (например, в центре). В третий раз каждый получает карточку, на которой нарисованы только 4 фигурки из 9, а оставшиеся 5 надо дорисовать самостоятельно (рис. 2.3). С обоими заданиями все четверо справились безукоризненно.

Задание 4. Кладу перед детьми вырезанный из ватмана треугольник, спрашиваю, как называется эта фигурка и почему. Потом последовательно предъявляю четырехугольник (неправильной формы), прямоугольник, квадрат, пятиугольник. Дети называют. «А как отличить прямоугольник?» —

[2]Все наши мальчики занимались английским языком. Уроки английского им давала Алла, и порой мы использовали одни и те же картинки.

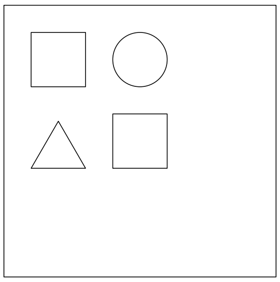


Рис. 2.3. Дорисовать недостающие фигурки. В каждой строке и в каждом столбце все фигурки должны быть разными (и все три типа должны присутствовать).

Дима: «У него все углы прямые». (Мы с Димой отдельно читали «Геометрию для малышей»[3], и он уже знает про прямые углы.) — «А можно его назвать четырехугольником?» — «Нет». — «Почему же? Посчитайте, сколько у него углов». — «Четыре». — «Ну вот, значит, он тоже четырехугольник. У него два имени: четырехугольник и прямоугольник. Прямоугольник — это четырехугольник, но особенный, с прямым углом». Затем то же повторяется с квадратом. «А можно его назвать прямоугольником?» — «Нет». — «Почему?» — Дима: «Потому что он не такой длинненький». Следует аналогичное обсуждение: я объясняю, что квадрат можно называть тремя именами, и все будет правильно.

«А скажите теперь, чего больше: квадратов или прямоугольников?» Все: «Квадратов!» — «Почему?» — Дима: «Потому что их легче вырезать». Я отступаю.

[В этом месте надо было положить все фигурки на стол и попросить посчитать, сколько квадратов, сколько прямоугольников и сколько четырехугольников.]

Следующей фигуркой даю невыпуклый восьмиугольник (рис. 2.4).

Только один Женя правильно подсчитывает количество углов, остальные не учитывают вмятин. Объясняю, что надо учитывать. Дима: «А разве это углы? Это же дырки... угольные».

Раздаю всем по одному четырехугольнику неправильной формы (потом еще по одному и т. д.); четырехугольники все одинаковые. Серия заданий:

[3]В. Г. Житомирский, Л. Н. Шеврин «Геометрия для малышей» (М.: Педагогика, 1975). К тому же жанру можно отнести книги Л. Л. Сикорук «Физика для малышей» (М.: Педагогика, 1983) и Е. П. Левитан «Малышам о звездах и планетах» (М.: Педагогика, 1986). Мне больше всех понравилась «Физика» Сикорука. Все три книги превосходно иллюстрированы. Не знаю, переиздавались ли они с тех пор.

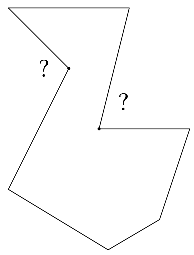


Рис. 2.4. Восьмиугольник или нет?

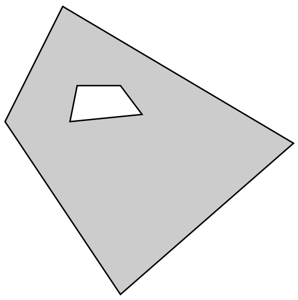


Рис. 2.5. Что это? Четырехугольник?

нужно провести карандашом линию и, разрезав по ней, получить из четырехугольника:

(а) два треугольника;

(б) два четырехугольника;

(в) четырехугольник и треугольник;

(г) пятиугольник и треугольник.

Безукоризненно выполнил все четыре пункта только Андрюша. Остальные иногда ошибались, иногда смотрели решения друг у друга.

Для пункта (б) Дима выдал неожиданное решение: вырезал четырехугольник внутри, а снаружи тоже остался четырехугольник, хотя и с дыркой (рис. 2.5).

Я чуть было по инерции не заявил, что решение неправильное, но вовремя остановился, поняв, что такую оригинальную идею надо не губить, а, наоборот, поддержать. Вдохновленный, Дима пошел по проторенной дорожке и решил точно так же пункт (в), вырезав треугольник внутри четырехугольника, после чего безуспешно пытался решить тем же методом задачу (г), и в результате так ее и не сделал.

В конце занятия возник небольшой сумбур и путаница, мальчики чуть было не подрались из-за ножниц (их было всего две пары), да и времени прошло уже много, так что я занятие прекратил, так и не обсудив до конца со всеми вместе пункты (в) и (г).

Андрюша захотел все свои бумажки взять с собой, а с его легкой руки и все остальные тоже захотели.

Занятие 23. Ханойская башня

28 февраля 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

Задание 1. Устные вопросы на транзитивность.

Андрюше: «Один мальчик любит мороженое больше, чем орехи, а орехи больше, чем апельсины. Что он любит больше — мороженое или апельсины?» — «Мороженое». — «Почему?» — «Потому что он раньше начал есть мороженое». — «Ему что, раньше разрешили, что ли?» — «Да».

Диме: «У дедушки денег больше, чем у папы, а у папы больше, чем у мамы. У кого больше денег — у дедушки или у мамы?» — «У дедушки». — «Почему?» — «Я знаю, что дедушка больше зарабатывает, чем мама». — «Откуда ты это знаешь?» — «Ну просто знаю, и всё». — «Но ты это знаешь из задачи или из жизни?» — «Из жизни».

Жене: «Сосна выше елки, а елка выше березы. Что выше — сосна или береза?» — «Сосна». — «Почему?» — Не помню, что ответил Женя, но тут встрял Дима и сказал: «Потому что сосна самая большая, а береза самая маленькая. А елка самая средняя». — Все обсуждают, так ли это в жизни, показывают жестами. (Вспомнил, что сказал Женя: «Сосна раньше начала расти, чем береза». Может быть, мой вопрос «почему?» они воспринимают как требование объяснить, «почему так произошло, что...?» Отодвигая в сторону логику, из которой следует, что сосна выше березы, объяснить, почему так получилось, что она выше.)

Пете: «В кастрюле помещается больше воды, чем в чайнике, а в чайнике больше, чем в кувшине. Где помещается больше — в кастрюле или в кувшине?» — «В кастрюле». — «Почему?» Опять вмешивается Дима, и они вместе с Петей всё правильно объясняют.

[Надо попробовать неправдоподобные условия: например, «Женя[4] больше Димы, а Дима больше папы. Кто больше — папа или Женя?»]

[4]Здесь имеется в виду Женя — младшая сестренка Димы; ей в этот момент чуть больше года.

Задание 2. Снова, как и в прошлый раз, на столе квадрат, прямоугольник и четырехугольник. Вспоминаем их названия, прошу посчитать, сколько на столе квадратов (один), прямоугольников (два), четырехугольников (три). На последний вопрос правильно отвечает один Петя. Наконец, итоговый вопрос: «Чего больше — квадратов или четырехугольников?» Тот же результат: «Квадратов» (потому что их много в домах, на крыше, на трубе и т. п.). Я ничего не объясняю, только спрашиваю, являются ли квадраты четырехугольниками. Ответ: «Да».

Задание 3. Из «математического набора первоклассников» выбрано 16 предметов (число, кратное четырем — количеству участников): 2 синих кружочка, 2 желтых квадрата, 3 красных квадрата, 4 красных треугольника, 5 зеленых треугольников. На стол кладется кру́гом веревка, связанная концами. Я даю каждому по очереди по одной фигурке — нужно, чтобы красные лежали внутри веревки, не красные — снаружи.

Веревка убирается, но кладется другая, точно такая же. Теперь нужно внутрь класть треугольники, а наружу — не треугольники. Снова все справляются (Андрюша делает одну ошибку).

Наконец, на столе обе веревки, но пока я кладу их непересекающимися. Требуется выполнить оба задания одновременно. После первого прохода я подсовываю Диме (впервые) красный треугольник. Он, не задумываясь, кладет его в красные. Я обращаю внимание всех на конфликт между условиями, говорю, что это задача для всех.

[Опять спешка! Надо было дождаться конца и потом обсудить, всё ли верно.]

Андрюша: «А это нарочно так придумано?» Я: «Конечно, нарочно. До сих пор была только подготовка, а настоящая задача началась сейчас. Нужно что-то придумать, изобрести, чтобы этот треугольник лежал и тут, и тут». Дима пытается положить треугольник в виде мостика на обе веревки. Я: «А может быть, передвинуть как-нибудь веревки?» Андрюша первый догадывается, что нужно положить веревки одну на другую. (Кажется, Дима тоже догадался, но не успел сказать.)

Теперь задача решена и легко доделывается до конца (каждый по одному разу получает красный треугольник, так как их всего 4). На черном фоне стола белые веревки и разноцветные фигурки выглядят очень красиво. Я обращаю внимание ребят на этот факт.

Андрюша: «Это была моя идея!» Дима: «Нет, моя!» Я еще пытался что-то сказать о том, что красные треугольники принадлежат сразу двум классам, но без эффекта.

Задание 4. Ханойская башня. Каждый получает экземпляр игры, я объясняю правила.

Эта игра — настоящая жемчужина программистской литературы; в нее можно играть с пятилетними, но и пятикурсникам-информатикам тоже найдется над чем подумать. В начальной позиции несколько кружков разных размеров уложены друг на друга, образуя башню. Башня стоит на одном из трех полей (рис. 2.6).

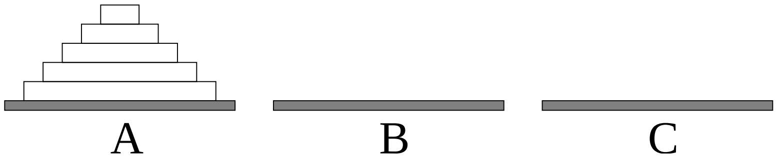


Рис. 2.6. Ханойская башня в начальной позиции.

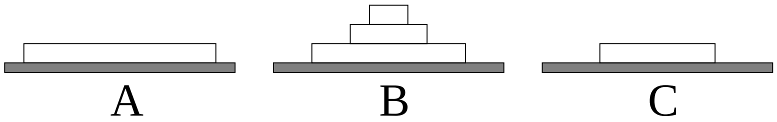


Рис. 2.7. Башня в одной из промежуточных позиций. В конце игры она должна полностью переместиться на одно из соседних полей — либо на B, либо на C.

Цель игры — переставить башню на другое поле, соблюдая следующие правила:

(а) кружки переставляются только с поля на поле; при этом они кладутся друг на друга, так что получаются маленькие башни; нельзя откладывать кружок куда-то в сторону;

(б) при каждом ходе передвигается только один кружок — несколько кружков одновременно переносить нельзя; в частности, запрещено брать по кружку в каждую руку;

(в) можно брать кружок лишь с вершины какой-нибудь башни и класть его только на вершину другой башни; иными словами, нельзя брать кружок из середины башни, и нельзя вставлять его в середину другой башни (чтобы сделать это правило более явным, кружки часто изготовляют с отверстиями в центре, и каждую башню надевают на стержень);

(г) наконец — и это очень важно — запрещено класть больший кружок на меньший.

Игру изобрел в конце XIX века французский математик Эдуард Люка. Он же украсил ее такой романтической легендой.

> *Где-то в непроходимых джунглях недалеко от Ханоя есть монастырь Брамы. В начале времен, когда Брама создавал мир, он воздвиг в этом монастыре три высоких алмазных стержня и на один из них возложил 64 диска, сделанных из чистого золота. Он приказал монахам перенести эту башню на другой стержень (с соблюдением всех правил, разумеется). С того времени монахи работают день и ночь. Когда они закончат свой труд, наступит конец времен.*

Отдельная задача для более старших детей — оценить хотя бы приблизительно, когда наступит этот самый «конец времен».

[Указание: чтобы переставить башню из n дисков, требуется $2^n - 1$ операций. Пусть, например, одна операция занимает одну секунду. Сколько времени потребуется для перестановки всей башни при $n = 64$?]

Оказалось, что в процессе работы очень трудно проследить за всеми; мальчики постоянно нарушали правила.

Дима уже два раза играл в эту игру, поэтому справляется первый и правил не нарушает. Под конец, когда все были в тупике, они, затаив дыхание, следили за его быстрыми и уверенными движениями.

Петя никак не мог осознать правила и нарушал их до самого конца, хотя ему помогали и я, и Дима, и Наташа[5]. На Диму он злился за подсказки.

Женя правила осознал, но действовал крайне неуверенно. Почти всё время просидел со снятыми двумя верхними фишками, не зная, что делать дальше. Наташа, Дима и я ему помогали. На Диму он злился, говоря, что у него не получается из-за того, что Дима мешает. Дима над ним издевался, говорил, что он нарочно помогал Пете, чтобы Петя закончил раньше Жени

[5]Наташа — мама Жени; упоминаемая ниже Люда — мама Андрюши. Родители почти всегда присутствовали на занятиях — ведь занятия длились недолго, а детей надо было потом забирать и уводить домой. С одной стороны, меня это довольно сильно сковывало: я никогда не чувствовал себя на кружке полновластным хозяином ситуации и не мог дать волю эмоциям; с другой — служило к росту моей «славы»: родители ранее и не подозревали, что математикой можно заниматься так интересно и разнообразно.

и Андрюши, что все уже погуляют, а Женя всё еще будет сидеть и т. п. Пришлось сделать ему довольно резкое замечание.

Андрюша, за которым я недоглядел, переставил свою башню очень быстро, быстрее, чем смог бы я сам. Я попросил его повторить, но он, поняв, что, видимо, сделал что-то не так, категорически отказался, сказав, что он решил задачу первым, и что второй раз он повторять не будет. Я сказал: «Я думаю, Андрюша, что ты нарушал правила». — «Когда?!» — нагло заявил Андрюша, понимая, что я не смогу его уличить, так как ничего не видел. Но тут его выдала Люда. Андрюша очень расстроился. Люда его утешала, стала показывать, как играть по правилам, но в итоге всё сделала сама. После того, как закончил Петя, Андрюша сказал: «А Пете очень много подсказывали», — явно забыв, что сам вообще не справился с задачей. Он тоже пытался издеваться над Женей.

Мой недостаток — я реагирую на такое поведение так, как будто оно исходит от взрослых, а не от маленьких детей. Принцип «ругать поступок, а не ребенка» теоретически мне знаком, но практика сильно отстает. Самое главное то, что у меня самого портится настроение, и это отражается на общей атмосфере гораздо сильнее, чем детские глупости.

Занятие 24. Немножко топологии

7 марта 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{10}$ (35 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Вопросы на транзитивность с невозможными условиями.

Диме: «Жили были девочка Женя, мальчик Дима и папа. Женя была больше Димы («Ой!»), а Дима — больше папы. Как ты думаешь, кто больше: Женя или папа?» (Смех.) Отвечает правильно: «Женя больше, ведь она самая большая. Она ведь больше Димы, а Дима сам больше папы».

Жене: «Однажды червяк, велосипед и самолет стали соревноваться, кто из них умеет быстрее бегать. Оказалось, что червяк бегает быстрее, чем велосипед, а велосипед быстрее, чем самолет. Как ты думаешь, кто быстрее: червяк или самолет?» Женя отвечает правильно, но долго не решается что-нибудь сказать (качается взад-вперед, падает на диван, хихикает). Я его тороплю, Наташа тоже вмешивается, но это не помогает. Оказывается, его смущало то, что самолет не бегает, а летает.

Пете: «Жили на свете три мальчика: Дима, Петя и Андрюша. Дима был старше Пети, а Петя старше Андрюши. Кто старше: Дима или Андрюша?» Петя отвечает и объясняет правильно.

[Замечание. С некоторой натяжкой можно считать, что такие вопросы представляют собой пример *познавательного конфликта* по Яну Смедслунду. То есть, нужно выбрать одно из двух противоположных объяснений. Если муравей тяжелее собаки, а собака тяжелее слона, то вывод о том, кто тяжелее всех, можно сделать: (а) на основе житейских соображений (очевидно, что слон тяжелее, так как он очень большой, а муравей маленький); (б) на основе транзитивности, то есть исходя из условий задачи. Может быть, потому юмор и стимулирует развитие интеллекта, что создает нечто вроде познавательного конфликта. Впрочем, натяжка здесь довольно велика: ведь дети сразу понимают, что нужно говорить «всё наоборот».]

Задание 2. Топологические закономерности (на основе классификации 8 карточек на 4 и 4).

Я напоминаю игру «четвертый — лишний». Объясняю, что сейчас будет не один лишний, а надо разделить карточки на две равные кучки (заодно спрашиваю, сколько будет 8 поделить на 2).

Наборы такие (противопоставления):

(1) выпуклые — невыпуклые (это не топологическое, а геометрическое свойство), все гомеоморфны окружности;

(2) одна фигурка — две фигурки;

(3) всегда две фигурки, но 4 раза одна внутри другой, а 4 раза — снаружи;

(4) 8 топологических окружностей, четыре из них с торчщими «усами»;

(5) 8 окружностей, из четырех торчат по 2 уса, из остальных четырех — по 3 уса;

(6) на каждой карточке — две похожие по форме фигурки, одна внутри другой, соединенные мостиками; мостиков либо два, либо три.

Большие трудности вызвали задачи 3 и 6, задача 5 оказалась средней трудности, остальные решались мгновенно.

Проблема другого рода: как только карточки появлялись на столе, мальчишки норовили сразу, еще толком ничего не разглядев, утащить побольше карточек себе. То и дело возникали конфликты, карточки мялись, я раздражался, и, главное, ничего толком нельзя было разглядеть. В конце концов пришлось навести строгий порядок и вообще запретить трогать карточки, пока не указано решение и я его не одобрю.

Легкие задачи (1, 2 и 4) решал, как правило, Петя. Они с Димой были наиболее активны, но Петя ориентировался быстрее. Жене уже ничего не доставалось. Дима изобретал множество «объяснений», но часто довольно вычурных, и не всегда помнил об условиях задачи (например, вместо разбиения $4 + 4$ предлагал $2 + 6$).

Задачи 5 и 6, более трудные, после всеобщего тупика решил Женя. Надо сказать, что и задачи на «четвертый лишний» он решал тоже очень хорошо. Мне большого труда стоило набраться терпения его выслушать (как только внимание обращено непосредственно к нему, он замолкает) и оградить его карточки от Димы и Пети.

Задачу 6 Дима решил иначе, чем было мной задумано: разделил все фигуры на прямолинейные и криволинейные. Мне пришлось согласиться. После этого он протестовал против дальнейших попыток решить задачу другим способом, так что у нас даже состоялся неприятный разговор о том, что кружок не для него одного, а для всех.

В задаче 3 мне пришлось самому подсказать решение. Я сказал, что все их закономерности, которые они предлагали (особенно Дима), очень сложные, а я могу объяснить всё очень просто, сказав всего два слова. Одно слово скажет, что положить в одну кучку, а другое — что в другую. И потом сказал эти слова: «внутри» и «снаружи».

Задание 3. Ханойская башня (второй раз).

Дима кончил первым. Женя (при моих примерно пяти подсказках) справился вторым и очень этому радовался, прыгал на месте и дрыгал ногами. Петя снова делал всё подряд по подсказкам Димы (у него эта игра почему-то не идет), только первые ходов 5—6 и последние два хода сделал сам.

◁ Я пытался ему не дать, чтобы потом говорить, что всё сделал за него. — Дима. ▷

Кроме перечисленных трех заданий планировалось еще одно — на множество и его подмножества, но не хватило времени. Может, это и к лучшему, а то было бы сегодня слишком много задач на карточках.

Занятие 25. Мальчик в лифте

14 марта 1981 (суббота) $10^{40} – 11^{00}$ (20 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Занятие длилось 20 минут, так как Женя опоздал, а я торопился — мне надо было уйти не позже 11^{00}.

Задание 1. Одному маленькому мальчику, который жил на 16 этаже, мама разрешала самому ездить на лифте. Но ездил он как-то странно: когда ехал вниз, то доезжал с 16 до 1 этажа, а когда ехал вверх, то доезжал почему-то только до 8 этажа, а дальше шел пешком. Чем вы можете это объяснить?

— Это у него привычка такая была, — сказал Андрюша.

— Это он тренировался.

И так далее.

— А когда он немножко подрос, то стал ездить до 10 этажа, а уже дальше шел пешком.

— Наверное, он стал более ленивый, — сказал Дима.

— Но ведь в задаче не сказано, что он был ленивый или не ленивый, и хотел он тренироваться или нет. Сказано только, что он был маленький.

— Ну и что?

Андрюша резюмирует:

— Просто у него такая привычка была, и всё.

Я оставляю эту задачу на дом.

[Я надеялся, что им, исходя из их жизненного опыта, будет легко решить эту задачу, но не тут-то было.]

Задание 2. На блюдце — фишки 4 цветов, по 13 штук каждого цвета (одна большая и 12 маленьких). Я начинаю рассказ: «Жили были четыре армии — красная, синяя, зеленая и желтая. Вот это — их полководцы (больши́е фишки), а остальные — солдаты. Давайте построим армии!»

Мы строим каждую армию в ряд вслед за полководцем. Ряды получились неодинаковые по длине. Спонтанно, без моей инициативы, возникает дискуссия о том, где солдат больше. Андрюша находится на интересной промежуточной стадии: первоначально он сказал, что больше солдат в более длинном ряду (опираясь только на длину), но потом, когда я раздвинул короткий ряд и сделал его более длинным, он продолжал утверждать, что там, где было больше, там и осталось больше. Я, по свойственному мне отсутствию гибкости, не дал дискуссии развернуться, а пошел дальше излагать задачу.

Я продолжаю: «И вот эти армии всё время воевали друг с другом, и в конце концов им это надоело, и они решили заключить мир и в честь этого устроить великий пир. Они расставили столы (я раскладываю квадратики из ватмана), и за каждый стол село четыре воина, по одному каждого цвета. Но только садиться они должны были так, чтобы за каждым столом они сидели по-другому — такое было правило: только тогда мир будет прочным и они не будут больше воевать».

Я сам рассаживаю полководцев, потом все сразу хватают себе фишки и начинают расставлять (хотя я задумал работу по очереди). После этого поиск совпадений происходит довольно сумбурно. Первым находит совпадающие расположения Петя. Когда обнаруживается совпадение, они тут же одну из расстановок меняют, не задумываясь о том, что может снова получиться совпадение с каким-то другим столиком. Иногда (не без помощи

Наташи) происходит путаница в постановке задачи — а именно, отождествление расстановок, полученных друг из друга поворотом.

[Замечание: всего возможны $4! = 24$ расстановки, но это для детей слишком много. Я выбрал 12 фишек исключительно из тех соображений, что ребят будет либо трое, либо четверо, а фишек должно хватить на всех поровну.]

Дополнение. Во вторник Алла предложила Диме доехать в лифте до 16 этажа. Он не достал до кнопки, после чего сам вспомнил задачу и понял решение. То же с Андрюшей: ему и подсказка не потребовалась, так как он и без того живет на 14 этаже.

◁ На занятии мне не приходило в голову представить себе, как мальчик входит в лифт, протягивает руку к кнопке и т. д. Тем более я не пытался представить себя на месте мальчика. — Дима. ▷

Занятие 26. Пересекающиеся классы

21 марта 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{00}$ (25 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Классификация с пересечением.

(1) Я предлагаю ребятам набор из 5 карточек (бабочка, ворона, самолет, поезд, корабль) и прошу отобрать те из предметов, которые умеют летать. Затем мы собираем карточки обратно в кучу, и я прошу отобрать средства транспорта (то, на чём люди путешествуют). Возникает спор о самолете. Дима считает, что его надо оставить с летающими предметами (чтобы разбиение было на непересекающиеся классы), Петя тащит к средствам транспорта. Женя подводит итог спору: «Он общий!» Я хвалю Женю за найденное им удачное слово и спрашиваю (без всякой надежды на успех), на какую задачу это похоже. Неожиданно Дима правильно отвечает: «На красные треугольники». Я приятно удивлен, хвалю Диму и достаю веревочки. Женя пытается положить карточку с самолетом на две веревки (как когда-то пытался Дима), но Дима и Петя заявляют: «Не так!» — и делают всё как надо. Последующие наборы ребята раскладывают в веревки сами, не дожидаясь, чтобы я объявлял классы, хотя я сам думал, что это потребуется.

(2) Набор: яйцо, рыба, гриб, елка, цветы. Справляются сразу: «Вот это всё едят, а вот это всё растет». Петя сразу кладет гриб в серединку.

(3) Набор: голубь, сорока, страус, жираф, ящерица. Произошел казус: я по ошибке положил вместо картинки страуса картинку журавля, да к тому же, оговорившись, назвал его аистом. Приходится картинку перевернуть

рубашкой вверх и считать страусом. Я публично признаюсь в ошибке. Алла, пользуясь случаем, рассказывает про птицу по имени коростель-дергач, которая водится у нас и тоже не умеет летать, но проходит пешком сотни километров на зимовку.

[Вообще-то определять классы через отрицание («*не* умеет летать») не следует, но набор картинок ограничивает. В дальнейшем надо будет картинки заказывать Алле.]

(4) Набор: маленькая девочка, две маленькие девочки, маленький мальчик, мужчина, старик. Задача вызывает неожиданные трудности: Дима сразу кладет в середину старика со словами: «Это хоть и дядя, но похож на тетю». (На картинке изображен лысый старик с огромной бородой.) В итоге после многих проб задачу решает Петя.

Задание 2. Ребята получают карточки, на которых нарисованы некоторые множества предметов (цветок, карандаш, буква «А» и т. п., а также и по несколько предметов на одной карточке). Карточки кладутся на большой лист серой бумаги. Требуется показать стрелками отношение «Это моя часть» (т. е. подмножество). Среди карточек присутствует также и пустое множество.

Главная трудность — дети безжалостно относятся к чистым, аккуратным и красивым карточкам и всё норовят начать рисовать свою толстенную фломастерную стрелку прямо с карточки. Несколько карточек, несмотря не все меры предосторожности и многократные предупреждения, оказались измазанными.

Дима первым догадался провести стрелку от одного из множеств к пустому, но никак не мог догадаться провести такие же стрелки от остальных множеств.

Вообще, хотя ребята с заданием вполне справились, у меня почему-то осталось ощущение, что они не очень понимали, что делали.

Занятие 27. Четырехугольники на мозаике

4 апреля 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{10}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

По-моему, Андрюше наши занятия изрядно поднадоели. Ему нужно соревноваться и побеждать, а у нас для этого очень мало возможностей. Заставлять его глупо, но просто взять и больше его не приглашать тоже нельзя. Вопрос в том, как сделать это тактично. Одна надежда — что Люда понимает эти проблемы лучше многих других[6]. По крайней мере, сегодня Андрюша в большой мере испортил нам занятие.

Задание 1. Перед занятием дети очень расшумелись, и, чтобы их успокоить, я предложил им досчитать до десяти и обратно очень тихим шепотом. Но допустил ошибку, сказав, что самым большим молодцом будет тот, кто будет говорить тише всех. В результате после окончания счета вместо ожидаемой тишины и сосредоточенности возникла склока о том, кто говорил тише.

Задание 2. Оно снова было на классификацию с пересечением. Поскольку ребята уже были с ним знакомы, я сразу положил на стол два пересекающихся веревочных кольца и начал преамбулу: «Помните, мы уже решали с вами задачи про общие элементы: с красными треугольничками, потом с карточками...» Но закончить мне не удалось: Андрюша, не дослушав, заявил: «А, нет, я не хочу делать то, что уже было, мне неинтересно». Я ответил: «Если неинтересно, можешь не делать, просто посиди посмотри». Тут Петя заявил: «Мне тоже неинтересно». (А ведь всего неделю назад он говорил Кате[7], что математика ему нравится больше рисования и больше английского. И аргумент привел неожиданный: потому что на рисовании и на английском мы играем, а на математике занимаемся серьезным делом. У любви как у пташки крылья...). Не придумав ничего иного, я и ему сказал то же, что Андрюше. Немного подумав, и Дима — моя надежда и опора — сказал: «Мне вообще-то тоже неинтересно, но я всё-таки буду решать». Я не стал дожидаться мнения Жени и сказал: «Ну, хорошо, для Димы и Жени вот набор карточек...», — но тут Андрюша увидел, что картинки на карточках совсем другие, то есть и задание не то, что было, и закричал: «А-а! Тогда я буду, буду!» — и попытался сразу схватить себе все карточки, а следом за ним и Петя закричал: «Я тоже буду!» Но настроение у меня уже испортилось, я был раздражен, тем более, что Андрюша не давал другим карточки, дрался с Женей и беспрерывно глупо и не к месту шутил, отвлекая всех от работы.

Мы успели рассмотреть три набора карточек (из подготовленных одиннадцати!):

(1) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка (три предмета из резины, три предмета одежды; общий элемент — резиновые сапоги);

(2) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, погремушка, клоун (три предмета из резины, три игрушки; общий элемент — мяч);

[6] Люда, Андрюшина мама — преподаватель музыки.

[7] Катя — мама Пети.

(3) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, руль, кузов (три предмета из резины, три части автомобиля; общий элемент — шина).

В целом ребята решали задачи хуже, чем в первый раз. У Димы все тот же дефект: он не умеет оставаться в рамках задачи, и его повышенная креативность лишена дисциплины. Так, в данном случае он упорно настаивал на том, что шина — это тоже «одежда», так как ее можно надеть на пояс. Мы его долго переубеждали, после чего он заявил: «Всё равно это одежда, потому что ее одевают на автомобиль». Первую задачу ребята не сделали, и мне пришлось показать ее решение самому. В остальных двух задачах окончательный расклад карточек принадлежал Диме, но Женя и Петя оба раза еще раньше говорили правильное решение устно.

Задание 3. Задачи на мозаике.

Диме: сложить треугольник (справился);

Андрюше: сложить квадрат (справился);

Жене: сложить прямоугольник (справился);

Пете: (говорю, что это задание — самое трудное): сложить четырехугольник, но не прямоугольник. Петя складывает шестиугольник; предлагаю сосчитать углы; Дима сразу заявляет, что углов — два, и показывает их (те, что выделены на рис. 2.8).

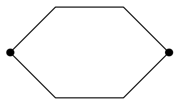


Рис. 2.8. Правда ли, что у этой фигурки всего два угла?

Женя кричит: «Неправильно!» — начинает сам правильно считать углы, но Дима, поняв свою ошибку и поняв, какие углы следует считать, отталкивает Женю и сам досчитывает до шести.

Диме переходит то же задание, что было Пете, он снова выдает нечто весьма неожиданное (рис. 2.9). Он говорит: «Это четырехугольник, потому что у него четыре угла», — и показывает углы (на рис. 2.9 выделены). Я его хвалю, говорю, что решение очень интересное, но что всё же нам нужна замкнутая фигура.

Андрюше — то же задание; он строит неправильной формы шестиугольник.

Жене — то же задание; Женя, наконец, находит правильное решение и строит параллелограмм с углом 45°.

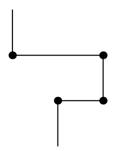


Рис. 2.9. Несколько неожиданный «четырехугольник».

На этом занятие кончается, но Петя не хочет уходить и требует, чтобы я выполнил его задание: он построит фигурку, а я должен построить такую же, повернутую на 90°. Я выполняю его задание, и он уходит удовлетворенный.

Занятие 28. Начинаем теорию вероятностей

11 апреля 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Андрюша)

Задание 1. Продолжение классификации с пересечением. Я снова кладу две веревочки и говорю: «Смотрите, какие вам Алла новые картинки нарисовала», — с некоторым нажимом на слово «новые». Не я один сменил тон: Андрюша, видимо, обработанный дома Людой, на этот раз гораздо более мягко спрашивает: «А почему мы всё время одинаковые задачи решаем?» Я ему безжалостно отвечаю: «А ты что — в прошлый раз все задачи легко решил?» Андрюша закусывает губу и молчит, на меня не смотрит. Я добавляю: «Мы так делаем просто для того, чтобы научиться хорошо решать такие задачи».

Я договариваюсь с ребятами, что на этот раз будет строгий порядок и все будут решать задачи по очереди. Пока один свою задачу не доделает, остальные ему не мешают. Мне бы с самого начала усвоить кондовый школьный принцип: прежде всего — дисциплина! Всё шло бы гораздо глаже.

(1) **Задание Диме:** карандаш, ручка, пишущая машинка, швейная машинка, пылесос (3 инструмента для письма, 3 домашних машины; общий элемент — пишущая машинка). Дима говорит: «Это то, чем пишут», — но в пересечение почему-то кладет швейную машинку. Я спрашиваю: «Разве этим пишут?» — «Да». — «А что это?» — «Швейная машинка. А-а! Ею не пишут, а строчат!» Тут Женя исправляет Диму, но Дима из чувства противоречия делает что-то уж совсем несусветное. После долгого обсуждения мы совместно восстанавливаем правильное решение. Ребята никак не могут сформулировать, что общего у «домашних машин». Я им помогаю, и

мы обсуждаем, что можно было бы еще положить в этот класс (мясорубку, стиральную машину, холодильник, ...) и во второй (мел, кисточку, ...).

(2) **Задание Андрюше:** песочные часы, ручные часы, будильник, кольцо, бусы (3 часов, 3 предмета, которые человек надевает; общий элемент — ручные часы). Андрюша правильно называет классы: «Это часы, а это надевают», — но в пересечение почему-то кладет будильник. Мы обсуждаем его решение, я спрашиваю, надевают ли будильник. Женя снова вносит правильное исправление. Тут вмешивается Дима, начинает всё перекладывать и примерно с третьей или четвертой попытки приходит к правильному решению. На этот раз Женя из чувства противоречия заявляет, что это решение (его собственное!) — неправильное, и опять всё перепутывает. Я восстанавливаю правильное решение, объясняю его. Неожиданно вмешивается Алла, которая придумала другое решение — «часы» и «круглые предметы» (в пересечении — будильник). Вообще демонстрация того факта, что возможны разные решения — дело полезное, но в данном случае именно такое разбиение (на «часы» и «круглые предметы») было предусмотрено в следующей задаче, так что эта вылазка Аллы фактически явилась подсказкой.

(3) **Задание Жене:** песочные часы, ручные часы, будильник, тарелка, барабан (3 часов, 3 «круглых предмета»; общий элемент — будильник). Женя сразу назвал правильные классы, но никак не решался положить карточки среди веревок. А когда положил, то в середине оказались песочные часы. Он, однако, объяснил, что они круглые, если смотреть сверху. Мне пришлось согласиться, и я убедил Женю, что будильник надо тоже положить в пересечение. После этого мы еще обсудили, что было бы, если бы ручные часы тоже были круглыми (множество часов было бы подмножеством множества круглых предметов).

Задание 2. Подступы к теории вероятностей. В непрозрачную сумку-мешок я кладу два желтых и два черных кубика. Говорю, что это темный чулан, в котором лежит пара желтых и пара черных ботинок. Чтобы пойти в гости, надо достать обязательно пару (нельзя надеть разноцветные ботинки). Но из-за того, что чулан темный, приходится доставать ботинки наугад, один за другим.

Ребята по очереди тащат кубики из мешка и запоминают, сколько кубиков пришлось вытащить до получения пары.

[Лучше было бы раздавать плашечки с цифрами из математического набора первоклассника.]

Мы обсуждаем, при каком количестве вытащенных кубиков получить одноцветную пару (а) нельзя; (б) можно, но не обязательно; (в) обязательно получится пара.

Затем то же самое задание повторяется с шестью кубиками (тремя парами). Во время моих объяснений Андрюша все время отвлекался и явно скучал; Люда (впервые за всё время) делала ему замечания — видимо, с целью «подготовки к школе».

После кружка произошла следующая сценка. Женя (маленькая) носила кубики ко мне в кабинет и ставила на пол, а я переставлял их себе на стол. В тот момент, когда на столе было 6 кубиков, а на полу — 3, Дима сказал: «А-а, там осталось всего три кубика!» Оказывается, он во время кружка умудрился сосчитать, что кубиков всего 12 (я столько заготовил на всякий случай), а сейчас устно решил задачу

$$12 - (6 + 3) = 3.$$

Характерно, что я с ним арифметикой совершенно не занимаюсь, только иногда отвечаю на его вопросы. Он постигает ее самостоятельно. Через месяц ему будет 5 лет.

Занятие 29. Полный провал

18 апреля 1981 (суббота) $10^{30} - 10^{45}$ (15 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Классификация с пересечением — окончание.

Использованы наборы:

(1) окно, стакан, очки, кольцо, ремень (три стеклянных предмета, три предмета, надеваемых человеком; общий элемент — очки) [ср. с вопросом 4];

(2) рояль, скрипка, барабан, тарелка, будильник (три музыкальных инструмента, три круглых предмета; общий элемент — барабан) [ср. с вопросами 3 и 5];

(3) рояль, скрипка, барабан, диван, шкаф (три музыкальных инструмента, три предмета мебели; общий элемент — рояль);

(4) окно, стакан, очки, чашка, кружка (три предмета из стекла, три предмета, из которых пьют; общий элемент — стакан);

(5) будильник, тарелка, барабан, ложка, чайник (три круглых предмета, три вида посуды; общий элемент — тарелка).

Все задачи дети решили правильно. В пятой задаче они предложили другой вариант решения: поскольку чайник тоже круглый (если смотреть на него сверху), то в пересечении будут два предмета: тарелка и чайник.

После того, как с классификацией было покончено, я совсем было собрался перейти к следующему заданию. В этот момент Андрюша спросил:

«*А когда математика кончится?*» Я ответил, что она уже кончилась для тех, кому неинтересно, и что он может идти играть, если хочет, поскольку я никого не заставляю и т. д. Но сказал я всё это не очень внятно и, честно говоря, несколько упавшим голосом. Наступило минутное замешательство, в течение которого я доставал мешок и цветные кубики, и тут Андрюша решился и сказал: «Нет, я всё-таки пойду поиграю», — и убежал в детскую комнату, где в это время были Женечка, Саня и Андрюшина двоюродная сестра, тоже Саня, трех лет (так ему всё это надоело, что он предпочел общество трех маленьких девочек). Следом за ним, ни слова не говоря, убежал Петя. После этого Женя неуверенно пробормотал: «Я вообще-то уже всё решил», — и тоже убежал. Только Дима хотел заниматься еще (отчасти это может быть связано с нашей беседой с ним в предыдущий день о его поведении на английском и о том, как важно самому хотеть заниматься). Он даже чуть не заплакал, когда я сказал: «Потом».

◁ Чуть не плакал я не от того, что теперь не будет урока, а от жалости к папе (он был такой грустный!) и от того, что я его утешал, а он не обращал внимания. — Дима. ▷

Но нам уже было не до него: мы решали «педагогические проблемы». Причем проблемы эти касались не только детей, но и меня самого. Алла прекрасно знала, сколько души я вкладываю в эти занятия, и ей потребовалось немало такта, чтобы как-то меня утешить. Я же сам не знал, в какую крайность броситься: то ли забросить всё к чертовой матери, то ли... что? Никакой другой идеи в голову, увы, не приходило. В неудобном положении оказалась также и Люда: с одной стороны, ей хотелось как-то защитить Андрюшу от нашего гнева, с другой — и нас не обидеть.

В итоге, после многочисленных общих и сепаратных обсуждений были приняты следующие решения:

1) *Андрюшу больше не приглашать.*[8] Назавтра я поговорил с Людой в том плане, что не вижу смысла заставлять его делать то, что ему не нравится, что он еще в школе успеет натерпеться, а пока пусть последние месяцы подышит спокойно, и что в конце концов он пропустит 3—4 занятия, так что потеря невелика. По существу, в этих словах нет никакого лицемерия. Ровно так оно всё и есть: и то, что не следует заставлять, и то, что еще в школе натерпится. К тому же он в сентябре уже идет в школу, а наш

[8]Образ Андрюши, который предстает из этих заметок, совершенно не соответствует действительности. Всё из-за того, что пропущены первые 20 занятий, на которых он был таким же полноценным и активным участником, как и остальные.

кружок — для дошкольников[9]. Жаль только, что всё это пришлось говорить не *до* всей этой истории, а после, и это придавало нормальным словам нежелательный оттенок. К тому же и мое состояние духа не совсем предрасполагало к переговорам: всем было видно, что я обижен.

2) *Ребят ни в коем случае не ругать.*

3) *Сделать перерыв.* Отчасти в надежде на то, что они сами спросят, когда же будет математика (раньше такое иногда бывало — даже с Андрюшей). Я некоторое время упирался, говорил: «Пока сами не попросят, заниматься не буду». Трудно придумать что-нибудь более глупое. Ребенок живет данным моментом, а не думает о том, что «должно произойти в субботу в 11 часов». Если же в субботу ничего не произойдет, он скорее всего просто ничего не заметит.

Перерыв продлился три недели.

4) *Сделать следующее занятие резко непохожим на все предыдущие* (совет Риты Марковны[10]).

◁ Мне бы как раз больше понравилось, если бы оно было такое же, как всегда. Я не помню, скучал ли я по кружку, но если скучал, то по тому, что было раньше, а не по чему-то новому. По крайней мере, я был неприятно удивлен, когда мы сели не на обычном месте, а в коридоре. — Дима. ▷

Глядя из сегодняшнего далека, можно только удивляться, до чего же гипертрофированной была моя реакция. Я оказался в роли революционера, мечтавшего осчастливить человечество. А человечество, вместо того, чтобы с распростертыми объятиями броситься мне навстречу, продолжало предаваться своим порокам. И вот я уже готов рубить головы...

Занятие 30. Переливание воды

9 мая 1981 (суббота) $10^{10} - 10^{40}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Опыты с переливанием воды (сохранение количества вещества). Занимались в коридоре — с одной стороны, чтобы не испортить ковер, но также и для создания «новизны обстановки».

Оборудование. Две кастрюли: в одной вода, подкрашенная заваркой чая, в другой вода, подкрашенная чернилами; две кружечки для наливания; две

[9]Через год пошли в школу Петя и Женя, но мы всё же продолжали заниматься, пока еще через год в школу не отправился Дима.

[10]Имеется в виду Р. М. Фрумкина. Мы часто советовались с ней по самым разным поводам, и этот случай был одним из них.

пустых молочных бутылки; два узких стакана; один широкий стакан; четыре фужера. Я договариваюсь с ребятами, чтобы они постарались ничего не разбить.

Вопрос первый. Я наливаю в бутылки поровну синей и желтой воды; ребята убеждаются, что поровну; после этого я разливаю желтую воду в два фужера и спрашиваю, какой теперь воды больше: желтой или синей? Вопреки всем моим ожиданиям Дима неожиданно дает правильный ответ («снова поровну»), и даже правильно всё объясняет («Потому что та же самая вода, ее только перелили. Ничего не добавляли и не убавляли».) Я пытаюсь не сдаваться: разливаю желтую воду по трем, потом по четырем фужерам (у Пиаже были такие испытуемые, которые меняли свою точку зрения, когда количество сосудов увеличивалось). Но Дима стоит на своем: воды столько же. Я с надеждой обращаюсь к Пете: «А ты, Петя, как думаешь?» Но Петя, увы, думает так же, и Женя тоже.

Я обескуражен и смущен. Во-первых, вся моя программа построения познавательного конфликта по Смедслунду уже не нужна, так как дети и без меня всё освоили. Во-вторых, занятие, на которое возлагалось столько надежд, находится под угрозой: не прошло еще и пяти минут от начала, а я уже едва ли не исчерпал всё, что задумал. С трепетом в душе я приступаю к следующему вопросу: если и сейчас ответят правильно, то это снова провал занятия, и что мне тогда делать?

Вопрос второй. Я наливаю в широкий стакан немного жидкости и предлагаю налить в узкий стакан столько же. Петя наливает воду до того же уровня (рис. 2.10).

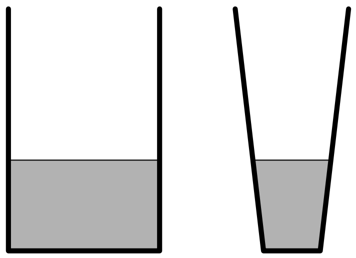


Рис. 2.10. Дети думают, что в этих стаканах одинаковое количество воды.

У меня немного отлегло от сердца. Я спрашиваю, что будет, если воду из широкого стакана перелить в другой узкий стакан (пустой). Станет ее больше или меньше? Ответ: «Столько же». — Значит, в двух узких стаканах будет поровну? — «Да». Я переливаю воду. Ребята очень удивляются, что в одном из стаканов оказалось больше, но довольно быстро догадываются, что дело в ширине стакана. Следует длинное обсуждение того, как влияет ширина и высота на количество жидкости.

После этого мы еще некоторое время занимаемся разными переливаниями. Дети понимают, что если нужно налить одинаковое количество жидкости в разные сосуды, то нужно сначала налить в одинаковые сосуды, а потом из одного из них воду перелить. Кроме того, переливание в одинаковые сосуды используется для проверки того, где воды больше.

Некоторую путаницу вносит то, что когда мы наливаем (правильно) поровну в узкий стакан и фужер, уровни воды оказываются одинаковыми, несмотря на разницу в ширине (рис. 2.11).

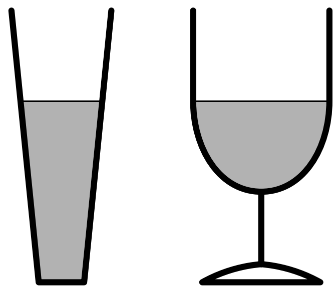


Рис. 2.11. А вот здесь воды и в самом деле поровну — это случайно так получилось.

Потом, когда мы наливаем поровну воды в бутылку и в фужер и для проверки хотим перелить воду либо из бутылки в такой же фужер, либо из фужера в такую же бутылку, Женя предлагает сравнить уровень воды, приподняв дно бутылки на высоту дна фужера (рис. 2.12). При этом он правильно объясняет свои действия тем, что ширина у фужера и у бутылки одинаковая.

Это наталкивает меня на следующий импровизированный вопрос. Я ставлю узкий стакан на перевернутую вверх дном кружку (рис. 2.13). При этом дно стакана и дно фужера оказываются на одной высоте. Я прошу налить воды поровну в стакан и в фужер. Наливает Женя — и допускает ту же ошибку, что и Петя вначале. Но стоило мне только снять стакан с кружки, и он сразу догадывается, что допустил ошибку, и исправляет ее.

Последний вопрос не связан с сохранением количества вещества, но связан с бутылками и водой. Каждый из ребят получает листок с изображением

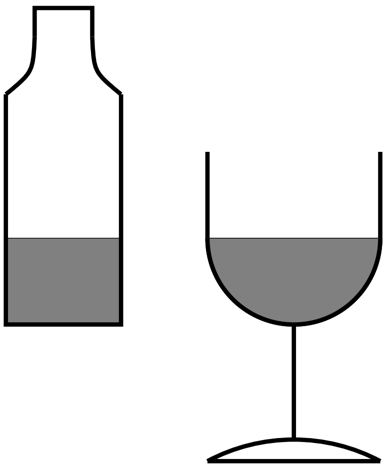


Рис. 2.12. Чтобы проверить, одинаковое ли количество воды в бутылке и в фужере, приподнимем бутылку так, чтобы ее дно оказалось на одном уровне с дном фужера.

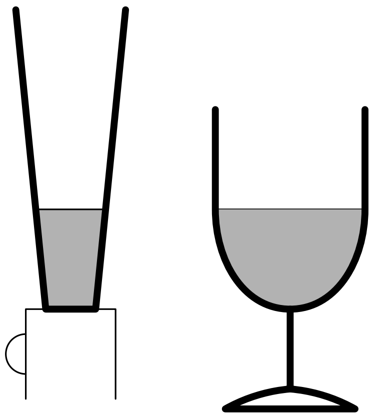


Рис. 2.13. Опять та же ошибка: воды здесь якобы поровну. Впрочем, на этот раз она быстро исправлена.

двух бутылок. Одна из них стоит вертикально, а другая наклонена. В вертикальной — уровень воды обозначен (рис. 2.14), нужно нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке.

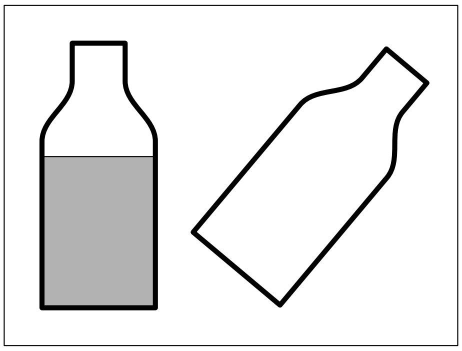


Рис. 2.14. Нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке.

Петя сразу сделал правильный рисунок. Женя подсмотрел у Пети и тоже сделал правильный рисунок (в данном случае тот факт, что он подсмотрел, не имеет большого значения; раз он нарисовал правильно, значит, согласно Пиаже, у него уже сформировалась соответствующая структура). Дима рисует неправильно — уровень параллелен дну.

◁ Я пытался не представить себе воду в бутылке, а угадать ответ. При этом, по-моему, мне было трудно сопоставить горизонтальный рисунок и вертикальную бутылку. — Дима. ▷

Мы наливаем в бутылку воду и, наклоняя бутылку, показываем ему уровень. Дима делает попытку исправить рисунок, но на этот раз изображает уровень вертикальным, а потом даже кривым (рис. 2.15).

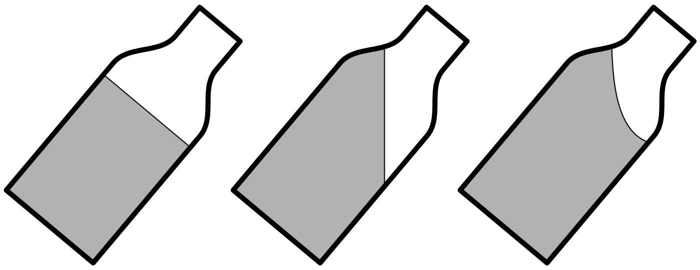


Рис. 2.15. Попытки нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке

(Помню, не так давно, я вычерпывал воду из ванночки черпаком, и Дима спрашивал, почему так получается, что я все время черпаю с одного края ванночки, но яма на этом месте не образуется, а вода всё равно остается ровной).

◁ Если бы меня спросили, получится ли так яма, я бы, наверное, ответил, что нет. Но я не понимал, зачем еще можно вычерпывать воду, если не затем, чтобы получилась яма. А уж если сам Папа копает, то всё должно получится. Папе я верил больше, чем своему опыту. — Дима. ▷

Я ничего не объясняю, и занятие на этом кончается. Напоследок рассказываю историю про Крошку Ру, который очень не любил рыбий жир, а маме Кенге надо было обязательно его уговорить, потому что доктор велел выпивать в день по стакану (при этом я показал на узкий стакан). И тогда мама Кенга стала переливать рыбий жир из узкого стакана в широкий. Крошка Ру *думал*, что после переливания рыбьего жира становится меньше (его ведь теперь полстакана, и уровень ниже) и соглашался его выпить. Вот так и вылечился.

По моим, пока незначительным, наблюдениям дети-интраверты проявляют больше склонности к логическому мышлению, а экстраверты имеют бóльшие успехи в геометрии. К интравертам я отношу Диму и Женю, а к экстравертам, соответственно, Петю и Андрюшу (хотя никаких тестов на эту тему я не проводил, это всё — внешние впечатления).

Характерно, что Дима до сих пор часто проливает жидкости из сосудов (чай из чашки, воду из банки для рисования и т. п.), так как недостаточно следит за их горизонтальностью. Мы на него сердимся за неуклюжесть и невнимательность, а причина, возможно, в математике.

Занятие 31. Снова теория вероятностей

16 мая 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{00}$ (25 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Теория вероятностей — продолжение.

Задание 1. Я: «Дима и Женя, наверное, сразу вспомнят игру, в которую мы играли, а Пети тогда не было, поэтому я расскажу всё с начала». Я рассказываю про человека, ищущего пару ботинок, и про темный чулан. Кладу в мешок четыре пары кубиков — два желтых, два красных, два синих и два черных. Мы по очереди вытаскиваем кубики до тех пор, пока не образуется одноцветная пара. Каждый берет себе плашечку с цифрой, показывающей, сколько ботинок ему для этого пришлось вытащить.

Я тоже участвую в игре. При этом мне достались четыре кубика всех четырех цветов. Я обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик ни оказался пятым, все равно обязательно будет готовая пара.

Петя продемонстрировал, что такое везение: единственный раз за оба занятия вытащил сразу два одноцветных кубика.

Задание 2. Та же история про трехногого человека. Мы кладем в мешок три желтых, три красных и три синих ботинка; цель та же — вытащить вслепую полный комплект обуви, три одноцветных ботинка. (Наташа пытается мне «помогать» и подсказывает, что это не ботинки, а варежки и шапка, но я настаиваю на своем варианте.)

Когда тащу я, у меня снова оказывается максимальный вариант: 6 кубиков, причем трижды по два цвета. Я снова пользуюсь возможностью и обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик я сейчас ни вытащил (седьмым по счету), у меня обязательно образуется полный комплект.

Задание 3. После того, как каждый вытащил кубики по одному разу, я убираю мешок и раскладываю все кубики на столе.

Последовательно для трех, четырех, пяти и шести кубиков мы показываем, как *может получиться* комплект и как *может не получиться* комплект.

Потом я предлагаю сделать то же самое для семи кубиков. После нескольких проб дети заявляют, что после семи вытаскиваний хотя бы один комплект получится обязательно. Я дополняю их опыт чем-то вроде доказательства.

Задание 4. Параллельно с обсуждением п. 3 я вытаскиваю сначала синюю бумажку — на нее мы кладем плашечки с цифрами $0, 1, 2$ («невозможно получить комплект»). Затем появляется зеленая бумажка, и на нее мы кладем цифры $3, 4, 5, 6$ («возможно, но не обязательно» получается комплект). Наконец, цифры $7, 8, 9$ («обязательно» получается комплект) мы кладем на красную бумажку. (Интересно отметить, что упомянутые синестезии невозможности с синим цветом, обязательности с красным, а возможности с зеленым мы с Аллой предложили независимо друг от друга, что говорит в пользу того, что они выбраны в каком-то смысле правильно. Что-то вроде «холодно», «тепло», «горячо».)

Задание 5. Я рассказываю о том, что градусник измеряет температуру («тепло или холодно»), а я придумал другой, сказочный градусник, который измеряет «надежду на успех». Показываю рисунки, на которых нарисованы: градусник с нулевой высотой столба жидкости («невозможно»), с максимальной высотой («обязательно»), а также три градусника, показывающие ту или иную степень надежды. Мы обсуждаем, какой из этих градусников показывает больше надежды, а какой меньше. А теперь посмотрим, что покажет наш градусник в задаче про трехногого человека. Я достаю лист (перфокарту), на котором нарисованы 9 градусников, и под каждым — цифра (от 1 до 9), и предлагаю на каждом градуснике показать карандашом уровень надежды на то, что мы вытащим три одинаковых ботинка. Однако мы с Димой должны были ехать к зубному врачу, и я уже спешил, поэтому для цифр $1, 2$ (вероятность равно нулю) и $7, 8, 9$ (вероятность равна единице) показал всё сам (и столб жидкости фломастером тоже рисовал сам), а ребятам оставил только цифры $3, 4, 5, 6$. Они совершенно правильно показали уровень надежды повышающимся от цифры к цифре, и мы этот факт обсудили (рис. 2.16).

[Надо было еще показать настоящий градусник и объяснить его устройство, так как нет уверенности, что они хорошо знают, как с ним обращаться.]

На этом занятие закончилось, я вскочил, и мы с Аллой побежали одевать Димку.

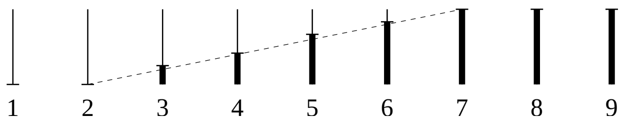


Рис. 2.16. Градусник, измеряющий надежду вытащить три одноцветных кубика.

Занятие 32. Дипломы

23 мая 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Заключительное занятие. Я говорю ребятам, что сегодня у нас последнее занятие в этом учебном году, и то задание, которое они сегодня получат, они должны постараться сделать очень аккуратно.

Задание 1. На отдельном листе бумаги я напоминаю ребятам обозначение операции сложения $(+)$, а также знак равенства $(=)$. Мы записываем несколько примеров на сложение.

Задание 2. Задание, аналогичное тому, что дается в болгарском букваре. Каждый получает листок плотной бумаги (в уголке написаны фамилия и имя). Листок разграфлен отрезками прямых линий на множество клеточек неправильной формы (немногим более 20 клеток). Внутри каждой клетки написана задача на сложение, напр. $3+2 =$ (все примеры даны в пределах 7, то есть 7 — наибольшая из получающихся сумм). Ребята должны выполнить все эти сложения и карандашом записать ответ.

Я проверяю результаты, исправляю ошибки (мы их стираем, и сложение выполняется заново), показываю пропущенные клеточки.

Дима пишет цифры 3 и 4 зеркальным образом: Ɛ ᔭ

Приходится написать на листе бумаги крупно все цифры и положить перед ним на стол.

Первым справился Петя, не сделав ни одной ошибки (хотя и пропустив пару клеточек). Вторым кончил Дима, сделав одну ошибку, которую сам обнаружил. Неожиданные трудности у него вызвал пример $0 + 2$, он долго колебался и думал, не получится ли в результате 0. Женя работал медленнее других, но тоже допустил всего одну ошибку. Примеры $2+5$ и $3+4$ вызвали у него затруднение; я принес ему счетные палочки, и он справился. Мальчики, уже закончившие, мешали ему, отвлекая и подсказывая.

В процессе работы Виталий[11] нас всех фотографировал.

Задание 3. Следующее задание — найти все клеточки с суммой 7 и закрасить их красным фломастером. Я еще раз призываю всех к аккуратности; советую сначала поставить в нужных клеточках красные точечки, потом мы вместе проверяем (каждый потерял по нескольку клеточек, я их показываю), затем начинается закрашивание. Получается большая красивая красная пятерка. Но, даже закончив работу, ребята замечают это только после моего вопроса, когда я карточку показал издали. Дима очень удивился, как это так получилось.

Задание 4. Я демонстрирую мальчикам свой диплом об окончании университета, объясняю, что такое диплом, что он означает, что на нём пишется. Показываю вкладыш, в котором стоят оценки. Я объясняю также, что такое «оценка за год». После этого начинается торжественное вручение дипломов. Диплом сделан на типографском бланке «Диплома наставника молодежи». Мы обрезали поля (в том числе лозунг «Пролетарии всех стран, соединяйтесь!»), на место серпа и молота наклеили картинку, нарисованную разноцветными фломастерами (три пересекающихся множества и еще изогнутый лист бумаги, на котором нарисован граф с цветными стрелками), слово «Диплом» оставили, а слова «наставника молодежи» заклеили словами «математического кружка». Далее следовал такой текст:

> *Этот диплом дан Диме Звонкину за то, что он целый год занимался математикой и стал очень умным.*
>
> *23 мая 1981 г.*

[11] Виталий — папа Пети.

(У остальных текст, естественно, такой же.)

Я объясняю, что та пятерка, которую они нарисовали, — это их пятерка за год, и что этот листок является вкладышем в их диплом. Дима спрашивает: «А почему мы все получили пятерки?» Я отвечаю: «Потому что все очень хорошо занимались весь год. А кроме того, я считаю, что вы ее сегодня вполне заработали: ведь если бы вы сосчитали что-нибудь неправильно и закрасили бы совсем не те клеточки, то и пятерки у вас не получилось бы». Последнее соображение вызывает оживленное обсуждение: они только сейчас поняли, что результат зависел от их правильной работы. Потом все по очереди читают, что написано у них в дипломе. Кажется, они всерьез поверили, что стали умными.

Я всех поздравляю с окончанием занятия и учебного года. Катя фотографирует каждого с дипломом в руках. После этого они долго сидят и хвастаются друг перед другом: «А у меня пятерка!» — «А у меня тоже пятерка!» — «А у меня тоже пятерка!» — «А я умный!» — «А я тоже умный!» — «А у меня пятерка!» и т. д., пока Дима не заявляет: «Нам нечем хвастаться, потому что у нас всех одно и то же».

Несколько дополнительных задач

В этом разделе я очень бегло и без всяких комментариев даю список задач из первых двадцати занятий, которые удалось вспомнить (и которые не упоминаются в других местах).

Определение количества предметов без счета.

1. Делается лесенка из кубиков (рис. 2.17). На каждую ступеньку кладется цифра (по очереди). После этого для последних столбиков проверяется, соответствует ли количество кубиков в них лежащей сверху цифре.

2. Делается еще один столбик из кубиков. Для определения количества кубиков в нём его прикладывают к лесенке.

3. Один мальчик берет два раза по три кубика, а другой — три раза по два. У кого больше? Обсуждается вопрос, почему одинаково.

4. Аналогично №1: Кладется ряд из кубиков, на нём сверху цифры. Количество кубиков в других рядах определяется прикладыванием.

5. Отправление писем, когда не хватает конвертов (попытаться разложить их по другим конвертам).

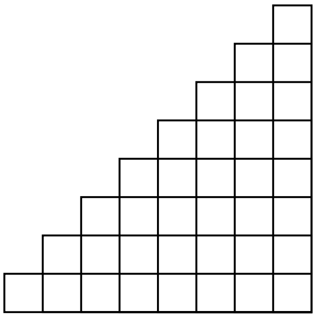


Рис. 2.17. Лесенка из кубиков

Комбинаторика.

1. Разложить треугольник, кружок и квадрат в разных последовательностях.

2. То же, но с тремя цветами.

3. То же с четырьмя предметами (два квадрата и два кружка).

Классификация.

1. Дана таблица 4×4. Слева нарисованы фигуры, которые помечают ее строки: квадрат, круг, треугольник и полукруг. Сверху изображены цвета, помечающие столбцы: красный, синий, желтый, зеленый. Требуется каждый предмет (например, синий квадрат) положить в нужную клеточку.

Квантор общности.

1. На столе лежат несколько фигурок. Верно ли, что:
а) все треугольники — красные?
б) все синие фигуры — кружочки?
в) все фигурки — без дырочек?

Порядок.

1. В трубочку закатываются три шарика: красный, синий и желтый. В каком порядке они будут выкатываться обратно?

2. Частичный порядок: в каком порядке мы надеваем разные предметы одежды и обуви (они нарисованы на карточках)? Ответить на вопросы:
а) что можно надеть раньше шубы?
б) что обязательно нужно надеть раньше шубы?

в) какие предметы одежды можно надеть последними?
г) какие можно снять первыми?
д) что можно снять только после шубы?
е) что можно снять и до, и после шубы?
ж) что нужно обязательно снять до шубы?

3. Я еду на работу сначала на автобусе, потом на троллейбусе, потом на метро, потом на трамвае. В каком порядке я еду обратно?

Симметрия.

1. Проводится прямая линия на листе бумаги и объявляется «зеркалом». Преподаватель проводит с одной стороны от нее произвольную загогулину. Требуется нарисовать ей симметричную. Результат можно проверить с помощью реального зеркала. Потом можно показать детям рисунки бабочек, цветов и т. п., спросить, где у них «зеркало».

2. Усложнение предыдущего: загогулина лежит в стороне от линии, или, наоборот, пересекает ее. Ее можно также делать многоцветной.

3. То же задание можно повторить на мозаике.

Поворот.

1. Преподаватель рисует фигурку. Ученик должен нарисовать такую же фигурку, но не «стоящую», а «лежащую» (см. примеры на рис. 2.18). Предварительно можно повертеть карточки с фигурками.

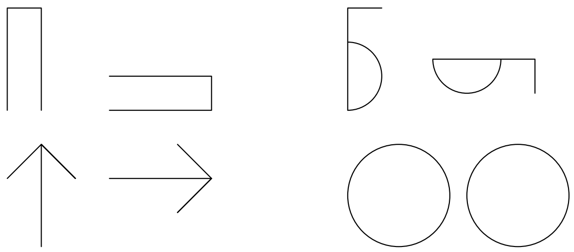


Рис. 2.18. Фигуры, повернутые на 90°.

2. То же самое задание на мозаике; то же, но с поворотом не по, а против часовой стрелки.

Разное.

1. Продолжить последовательность («узор»), рис. 2.19.

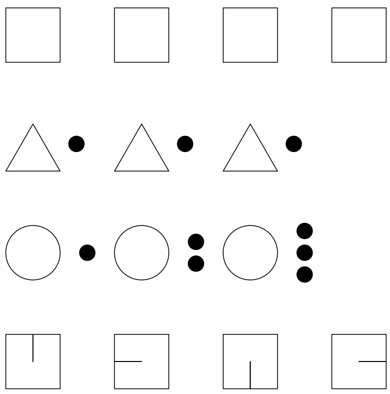


Рис. 2.19. Последовательность фигурок рисуется слева направо. Нужно угадать закономерность и продолжить.

2. Даны пары фигурок (рис. 2.20). Для каждой пары нарисовать «разницу» между ними, т. е. то, что присутствует только на одной фигурке, но не на двух.

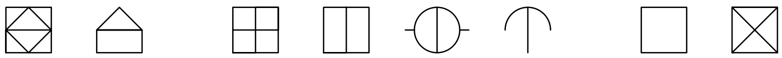


Рис. 2.20. Нарисовать всё то, что «отличает» одну фигурку от другой.

3. На мозаике построена фигура из красных и желтых фишек. Построить другую фигуру, заменив красные фишки желтыми, а желтые — красными.

4. Дана фигура. Построить такую же вверх ногами.

5. Диагональ делит прямоугольник и параллелограмм на два равных треугольника (бумажный параллелограмм разрезается по диагонали, после чего один треугольник накладывается на другой).

6. Задание, аналогичное №22-3 (см. стр. 53), но все фигурки к тому же еще раскрашены в три цвета.

7. У треугольника три угла. Один угол отрезали. Сколько осталось? (Ответ: четыре. Ведь если у треугольника отрезать угол, он превратится в четырехугольник.)

8. У последнего «пляшущего человечка» (рис. 2.21) указать форму юбочки и положение рук. Юбочки можно сделать разноцветными изначально, а

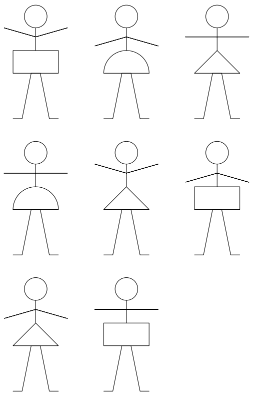


Рис. 2.21. «Пляшущие человечки». Добавить недостающего.

можно попросить ребят их раскрасить потом (с условием, чтобы в каждой строке и в каждом столбце все цвета были разными).

9. Дан рисунок с разноцветными фигурками — типа того, что показан на рис. 2.22. К нему задаются вопросы: сколько здесь нарисовано:

а) кругов?
б) красных (синих, желтых, зеленых) фигур?
в) многоугольников?
г) невыпуклых фигур?
д) четырехугольников?
е) прямоугольников?
ж) красных (и т. д.) многоугольников?
з) фигур (всего)?

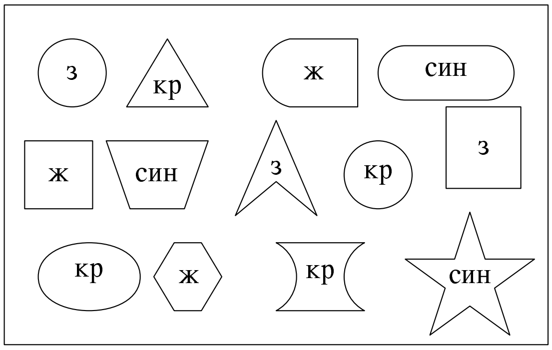


Рис. 2.22. Разноцветные фигурки.

Как рисовать куб?

Это — слегка затерявшаяся история: она записана на отдельном листке и без даты.

Однажды Дима сообщил мне: «А я знаю, как рисовать куб. Мне показали». — «Ну, как же?»

В ответ он нарисовал стандартную картинку, изображающую куб в «аксонометрической проекции» (рис. 2.23 слева). А я где-то читал, что детским рисункам более свойственна обратная перспектива (как в иконописи), и потому стал приставать с вопросами:

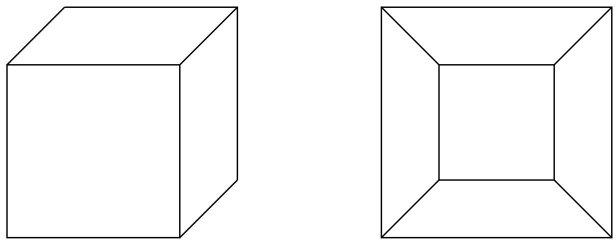


Рис. 2.23. Слева: так рисуют куб взрослые. Справа: рисунок, более свойственный ребенку (куб в «обратной перспективе»).

— А вот это что?

— Это верхняя сторона.

— А нижняя где?

— Ее не видно.

— А почему верхнюю видно, а нижнюю не видно?

— Да-а... действительно...

Дима задумался. Потом сам добавил: «И вот этот бок тоже видно, а вот этот нет». После этого он взял кубик, взял фломастер, уселся на пол, обложился листами бумаги и стал разбираться. Трудился он никак не менее часа. Потом пришел ко мне: «Вот, папа, я всё понял». И показал то, что изображено на рис. 2.23 справа, т. е. куб в обратной перспективе, пояснив при этом, где у него верхняя сторона, где нижняя, где правая и где левая. Я сказал ему: «Молодец!»

Следует признать, что в этой истории присутствует оттенок догматизма с моей стороны. Уж если я решил, что не следует искусственно перетаскивать ребенка на более высокий уровень развития, то буду даже стаскивать его обратно вниз, если это вместо меня посмел сделать кто-то другой. Не следует чрезмерно преувеличивать важность ни того, ни другого. Но вот что я безусловно ставлю себе в заслугу, так это час самостоятельной Диминой работы — целый час исследования вопроса о том, как же мы на самом деле видим куб и как его следует рисовать.

Хочу всё же добавить, что академик Б. В. Раушенбах в своих монографиях «Пространственные построения в живописи» (М.: Наука, 1980) и «Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы» (М.: Наука, 1986) показывает, что на самом деле существует много разных систем перспективы, и каждая из них имеет свои достоинства и свои недостатки. Обратная перспектива не лучше и не хуже классической ренессансной. Она больше подходит для изображения близких к нам предметов, а ренессансная — удаленных.

Глава 3.

Дети и C_5^2: история одной задачи

В этой главе использованы материалы моей статьи «Дети и C_5^2» в журнале «Знание–Сила», №2 за 1986 год.

Читатель уже мог заметить, что в наших занятиях, скажем, теорией вероятностей, нет ни определений, ни формул, ни теорем — ни даже арифметических подсчетов. Термин «теория вероятностей» используется просто за неимением лучшего. Ну, а что же тогда есть, если все эти стандартные математические ингредиенты отсутствуют?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно задать другой: а откуда вообще возникла теория вероятностей? Где ее источник? Ясно: как и многие другие науки, как даже сама арифметика, теория вероятностей возникла из наблюдений над определенными явлениями реального мира, а именно, над случайными, непредсказуемыми явлениями. Так вóт, как раз такие наблюдения, предшествующие науке, вполне можно проводить вместе с детьми. Не любые, конечно, лишь самые простые. Да дети и сами, без нас, этим занимаются — например, тогда, когда играют в игры с использованием игральной кости (кубика с написанными на нём очками от 1 до 6). В наших силах, однако, чуть-чуть выпятить, самую малость подчеркнуть вероятностную природу их наблюдений, а также познакомить их с тем, что вероятностный мир тоже несет в себе значительное многообразие. Можно, например, вместо кубика предложить детям кособокий многогранник, чтобы они увидели, как игра становится «несправедливой»: одни цифры выпадают чаще, чем другие. Или можно придумать игру, в которой требуется считать сумму очков на двух костях. Здесь тоже дети рано или поздно заметят, что, скажем, сумма 7 выпадает гораздо чаще, чем сумма 2. В такого рода деятельности мы не ограничены ничем, кроме собственной фантазии и реальных возможностей реальных детей. Если дети поняли что-то, если какое-то зерно запало в разум — очень хорошо. Если нет — неважно; тогда, значит, мы «просто играли».

Попробую сформулировать еще раз. Нас интересует не наука сама по себе как готовый продукт деятельности прошлых поколений, а те предварительные, предшествующие ей наблюдения, которые когда-то послужили толчком к ее появлению.

В этой главе я хочу рассмотреть более подробно один пример. В главе 1 рассказывалось об одном занятии; в этой главе речь пойдет об одной задаче. Всего одна задача — а сколько она дает поводов для размышлений!

Комбинаторная задача

Задача эта относится к области комбинаторики. Когда-то такую науку проходили в школе, в девятом классе (имеется в виду школа-десятилетка). Потом сочли очень трудной (вспомните хотя бы такое пугало, как *бином Ньютона!*) и из программы исключили. А все трудности старшеклассников состояли попросту в том, что им приходилось сразу начинать с формул, не пощупав ничего руками. В данном случае выражение «пощупать руками» надо понимать буквально. Ведь в комбинаторике речь идет о подсчете количества тех или иных комбинаций предметов. Только самих предметов-то и нет — их надо вообразить, и комбинации тоже. Вот если бы начать с комбинирования реальных кубиков, фишек... Но кто же станет этим заниматься в девятом классе!

Мы рассаживаемся вокруг мозаики. Задание такое: надо построить «бусы» — цепочку из пяти фишек, в которой две фишки должны быть черными, а оставшиеся три — белыми. Это, разумеется, можно сделать разными способами. Так вóт, наша задача как раз и состоит в том, чтобы перебрать все способы и при этом избежать повторений. По науке эти последовательности называются *сочетаниями из пяти элементов по два*; их количество в отечественной литературе обозначается C_5^2, в англоязычной — $\binom{5}{2}$, и равно оно $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Ничего этого, конечно, дети не знают и на наших занятиях не узнáют. Они просто строят бусы — по очереди, один за другим. Каждый результат проверяется всеми вместе — действительно ли он новый или совпадает с каким-нибудь из построенных ранее. Порой и спорим. Например, на рисунке 3.1 изображено одно решение или два разных? На самом деле спорить тут не о чем: мы можем *договориться*, что эти решения разные, а можем — что одинаковые. Получатся две разные задачи, и обе вполне интересны. Но более легкая из них та, в которой эти бусы считаются разными, и я предлагаю так и считать.

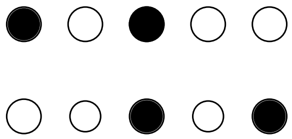


Рис. 3.1. Одинаковы ли эти бусы?

В конце концов мы доходим до 10 решений.

Главный вопрос комбинаторики — сколько всего имеется решений. Но мальчики еще очень далеки от него. Они вообще пока не видят разницы между «это невозможно» и «у меня не получается», и выражают твердую уверенность в том, что уж я-то могу построить и одиннадцатое решение, и двенадцатое, и вообще сколько захочу. Приходится взяться за дело мне самому. Ребята перебирали свои решения как попало, без всякой системы. Зато я демонстрирую образец систематичности: перебираю решения в строго определенном порядке. Сначала ставлю одну черную фишку на первое место, а вторую — поочередно на второе, третье, четвертое, пятое места. Когда эта серия исчерпана, ставлю первую фишку на вторую позицию, и т. д. Вы думаете, это производит впечатление? Ни малейшего. Единственное, что они поняли — это то, что у меня тоже ничего не вышло. (Как бы еще не подорвать свой авторитет...) Отличить одно решение от другого они уже могут, а вот отличить порядок от беспорядка им пока не по силам. Надо отложить эту задачу этак на полгодика. (А пока, может быть, приучать их аккуратно складывать все игрушки на свои места. Любопытно, связан ли порядок в игрушках с порядком в мыслях?)

Эквивалентные задачи

Прошло полгода, а может и больше, и задача появляется снова. Разумеется, я меняю ее физическое оформление. Каждый получает листок, на котором нарисованы сцепленные друг с другом кружочки, по пять штук в каждом ряду — см. рисунок 3.2.

Таких рядов заготовлено штук по пятнадцать — на случай неизбежных ошибок и повторений. Задача состоит в том, чтобы в каждой цепочке два

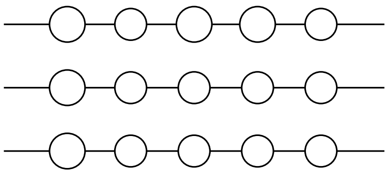


Рис. 3.2. Эти бусы изображены на бумаге; в каждой цепочке нужно закрасить две бусинки, но так, чтобы все бусы получились разными.

кружочка закрасить, а остальные три оставить пустыми. Чемпионом будет тот, кто найдет больше всего решений. И еще одна деталь, на первый взгляд пустячная. Я даю всем ребятам фломастеры разных цветов, а в дальнейших обсуждениях этот факт старательно игнорирую: каждый раз два кружка можно закрашивать любым цветом. Дети не всегда понимают, какая деталь является важной, а какая не имеет отношения к делу, и я пытаюсь, как могу, подчеркнуть чисто комбинаторную природу задачи. Помнится, в другой группе я вместо кружков рисовал то пять квадратов, то пять треугольников, и т. п.

Несколько минут самостоятельной работы (показывающей, между прочим, что задача на бумаге труднее задачи на мозаике — и это несмотря даже на прошедшие полгода), затем шумный обмен мнениями и результатами. Теперь у всех по 10 решений. «А вы помните, у нас уже была один раз очень похожая задача?» Ведь вот как легко промахнуться, подставив свою точку зрения вместо ребячьей! Что значит похожая? Мне как-то казалось само собой разумеющимся, что похожая задача — это та, в которой тоже фигурировали сочетания из пяти предметов по два. А дети решили, что похожая — это когда они тоже что-то рисовали фломастерами. Не люблю подсказывать, но на этот раз приходится. Мальчики с радостью хватаются за мозаику, строят бусы на ней и даже сами догадываются сверить решения на мозаике и на листочках. Кто-то вспоминает, что в прошлый раз тоже получилось 10 решений. Это, наконец-то, повод для первого сомнения: «А что, и правда больше нельзя построить?» Я загадочно улыбаюсь и перехожу к другому заданию. . .

Кажется, я набрел на золотую жилу. Или лучше сказать — на нового Протея. Эта задача допускает необычайное обилие непохожих друг на друга физических обличий; поэтому к ней можно возвращаться множество раз. Вот, например, как выглядит очередной вариант. В порядке очереди каждый из участников получает листок клетчатой бумаги, на котором нарисован прямоугольник размером 4×3 клетки. (Секундный спор о том, квадрат это или нет, после чего можно формулировать условие задачи.) Итак, требуется нарисовать все возможные дороги из левого нижнего угла в правый верхний, но при одном условии: из каждой клетки можно передвигаться только направо или вверх (см. рисунок 3.3). Если вам, уважаемый читатель, не совсем ясно, как связана эта задача с предыдущей, потерпите немного — сейчас всё разъяснится.

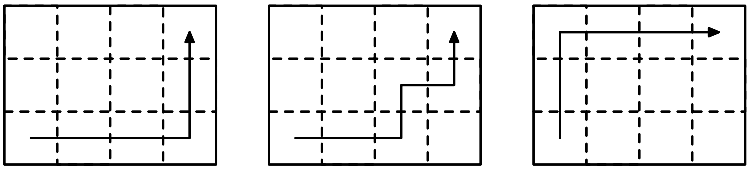
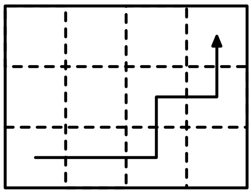


Рис. 3.3. Найти все пути из левого нижнего угла в правый верхний.

Работа кипит — чувствуется возросшая квалификация моих «математиков»: и ошибок меньше, и все 10 решений найдены довольно быстро. (А меж тем мы того и гляди наткнемся на новый подводный камень: мальчики уже начинают привыкать к тому, что во всех комбинаторных задачах ответом служит число 10. Не в этот раз, но в другой кто-то из них так и сказал: «Задача про 10». Надо срочно принимать меры — т. е. давать задачи с другим количеством решений.) Я, наконец, задаю главный вопрос: *чтобы пройти из угла в угол листочка, сколько шагов надо сделать направо и сколько вверх*? Увы, осечка. Я считаю шагом переход из клетки в соседнюю, а ребята — любой прямолинейный отрезок. Надо договориться о том, как правильно понимать слово «шаг». Договариваемся. Ну теперь-то уж ответ очевиден? Опять нет! Я в недоумении. После занятия обдумываю причину. А ведь и в самом деле, вопрос казался мне простым только по недомыслию. Ведь именно на этом свойстве — что количество шагов по горизонтали и по вертикали одинаково для всех путей — основано координатное представление векторов, то есть тот факт, что при сложении векторов их координаты тоже складываются. Отчетливо помню, как когда-то меня, уже достаточно взрослого, поразило это свойство векторов. На его основе можно сделать хорошую серию задач и с ее помощью даже дать намек на отрицательные числа, если допускать шаги назад, но подсчитывать их со знаком минус. (Кажется, эта идея так и осталась нереализованной.)

Ну а пока, на занятии, мы старательно подсчитываем шаги: оказывается, каждая дорожка содержит ровно три шага направо и ровно два шага вверх. Поэтому на следующем занятии мы решаем «новую задачу»: пишем последовательности букв ВВППП, ВПВПП, ВППВП, и т. д. — в каждой три буквы П и две буквы В. По замыслу каждая буква П означает шаг направо, а буква В — шаг вверх (см. рисунок 3.4).



П П В П В

Рис. 3.4. Шаг вправо обозначается буквой П, шаг вверх — буквой В.

Надо было видеть то волнение, которое охватило ребят, когда я показал им эту связь! Они немедленно потребовали разрезать листок, на котором написаны наши пятибуквенные слова, и, отталкивая друг друга, стали прикладывать каждое слово к соответствующей дорожке. Я остаюсь сторонним наблюдателем, однако пытаюсь невзначай подкинуть еще одну мысль. «Может быть, мы заодно еще какие-нибудь решения найдем, — говорю я. — Одиннадцатое, двенадцатое...» Один лишь Женя откликается на мои слова: «Нет, — говорит он. — Ведь здесь десять, и там тоже». — «Но, может быть, они разные? Здесь одни десять решений, а там другие?» К этому моменту, однако, все бумажки уже разложены, и наши надежды не оправдались: обе группы по 10 решений в точности соответствуют одна другой, или, как говорят математики, находятся во взаимно-однозначном соответствии. Как тем не менее важно хотя бы на мгновение усомниться в результате, чтобы потом ощутить его как результат!

Сейчас, на волне энтузиазма, можно продвинуться чуточку дальше. «А скажите, ребята, можно было обозначить шаги направо и вверх другими буквами? Не П и В, а другими?» — «Конечно! Какими хочешь можно». — «Ну, какими, например?» — «Например, А и Б», — говорит Петя. «Или, например, твердый знак и мягкий знак», — это Дима. «Или, например, — говорю я, — шаг направо обозначить плюсом, а шаг вверх — запятой». — «О-о-о!», — хохочут мальчики. «Или, — продолжаю я бесстрастным тоном, — шаг направо обозначать белым кружком, а шаг вверх — черным». — «Как это?» — «А вот так». Я беру ту дорожку, что на рисунке 3.4, беру соответствующее ей слово ППВПВ — и рисую рядом «бусы», показанные на рисунке 3.5.

И в наступившей паузе — паузе перед взрывом — еще успеваю соединить свои кружочки линиями, придав им окончательное сходство со второй

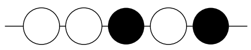


Рис. 3.5. Вместо буквы П рисуем белый кружок, вместо буквы В — черный.

задачей. Узнали! Тут ошибиться нельзя: озарение сопровождается радостным воплем и чуть ли не плясками. На столе всё смешивается, и продолжать дальше становится решительно невозможно. Пора кончать занятие. Теперь можно отступить примерно на месяц, отвлечься, позаниматься другими задачами. Пусть идея уляжется, пустит корни. К тому же однотипные задачи могут надоесть.

Обозначить. . .

Мы приближаемся к финишу. На столе пять коробок из-под спичек и два шарика: нужно класть эти два шарика в две коробки, оставляя остальные три коробки пустыми (см. рисунок 3.6). И чтоб не повторяться.

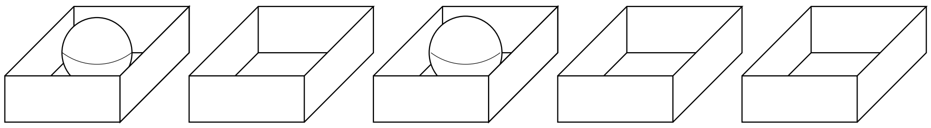


Рис. 3.6. Два шарика нужно положить в пять коробок разными способами. Главная трудность теперь в том, что нужно *помнить* все уже использованные ранее варианты: ведь физически они на столе больше не присутствуют.

Работа начинается вполне бойко, но уже на четвертом или пятом шаге возникает ожесточенный спор, было уже такое решение или нет. Мальчики обращаются ко мне как к арбитру, но я делаю вид, что тоже не помню. Разумеется, с моей стороны это «домашняя заготовка»: вполне можно было набрать достаточное количество коробочек и шариков, разложить коробочки по пять в ряд, и получилась бы в точности та же задача, что и раньше. А сейчас каждое решение приходится сравнивать с теми, которые «были да сплыли». Как же быть?

Между прочим, далеко не каждый ребенок сообразит, что делать в такой ситуации. Нужно *обозначить* каким-то значком пустую коробку и каким-то другим — коробку с шариком, и все найденные решения записывать. Но за этим скромным словечком «обозначить» прячется грандиозная идея, родившаяся и выросшая вместе с человеческой цивилизацией. Достаточно вспомнить во многом еще загадочную историю возникновения письма, эволюцию пиктограмм в иероглифы, иероглифов — в алфавитное письмо и так далее. Сколько существует на свете математика, она всегда занималась изобретением и усовершенствованием систем обозначений — сначала для чисел, потом для арифметических операций, для переменных, и далее — для всё более и более абстрактных сущностей. Уже в XX веке учение о знаковых системах осознало себя в качестве самостоятельной науки — семиотики.

К более серьезному разговору об использовании знаков мы еще вернемся в главе 5 (стр. 170). Пока же скажу лишь то, что на нашем кружке я всегда старался не только решать отдельные задачи, но и формулировать, хотя бы для себя самого, какие-то более общие цели. Знакомство с семиотической идеей — одна из таких «сверхзадач». Мы не раз обсуждали то, что числа обозначаются цифрами, звуки речи — буквами, а, скажем, музыкальные звуки — нотами. Вспоминали и другие системы знаков, например, дорожные знаки. Так что эта идея для моих кружковцев уже не совсем новая. Вот мальчики и предлагают *рисовать* решения. Поначалу они и в самом деле пытаются делать что-то вроде реалистических рисунков; очевидно, они находятся пока на пиктографическом уровне. Но это трудно, и довольно скоро мы переходим на иероглифический уровень: рисунки становятся более абстрактными — теперь пустая коробка обозначается квадратом, а заполненная — квадратом с кружком внутри. Я предлагаю в последнем случае рисовать просто кружок. Очередное препятствие: дети не умеют рисовать аккуратно, и нарисованный ими круг не всегда легко отличить от квадрата. Я делаю еще одно предложение: рисовать круг с крестом. Теперь, после всех этих эволюций, одно из решений выглядит так, как на рисунке 3.7.

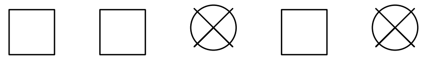


Рис. 3.7. Первая, вторая и четвертая коробки пусты, в третьей и пятой лежит по шарику.

«А почему крестом?» — «А какая разница, как обозначать», — отвечаю я. Это я пытаюсь равнодушным пожиманием плеч еще раз намекнуть на ту идею, про которую специалист по семиотике сказал бы что-нибудь вроде: «Относительная самостоятельность знака по отношению к означаемому и его (в известных пределах) произвольность».

Между прочим, получившаяся задача в одном отношении сложнее предыдущих: теперь каждое новое решение нужно сравнивать не с другими решениями, а с их условными обозначениями. На этот раз мальчики находят всего 9 решений, и после нескольких безуспешных попыток приходят к выводу, что больше решений нет.

И вот, наконец, наступает минута моего триумфа, та, которую я так долго ждал и так упорно готовил. Петя вдруг восклицает, тыча пальцем в лист бумаги: «Ой, смотрите! Пэ, вэ, пэ, вэ, пэ!» Дима вскакивает очень взволнованно: «Да, да, папа, я уже давно хотел тебе это сказать!» — «Значит, должно быть еще одно решение», — подхватывает Женя. «А давайте, — предлагает Дима, — принесем решение *той* задачи и найдем, чего не хватает». У детей всегда — сказано–сделано: он уже бежит в кабинет, чтобы искать там нужные решения. Ходить, однако, далеко не приходится. Подобно известному роялю в кустах, конверт с решениями всех предыдущих задач оказался здесь же, на столе.

◁ Мне было очень обидно, что «ходить далеко не пришлось». Во-первых, я зря пробе́гал в другую комнату за решением, а главное, я понял, что никакого открытия не было, а папа всё заранее подготовил. — Дима. ▷

Мы обсудили, какой из вариантов — с буквами, с дорожками или с бусами — удобнее для нас, и выбрали бусы. (Во время работы случился небольшой конфуз. Когда мы раскладывали полоски с «бусами», одна из них случайно перевернулась на 180°. В результате одно из прежних решений пропало, а другое, ему симметричное, оказалось повторенным дважды. Мы едва не запутались.)

◁ Я хотел сказать, что она перевернулась, но не стал, т. к. думал, что, может быть, это всё равно. — Дима. ▷

Почему-то все ребята как один были убеждены, что недостающий вариант обязательно окажется последним. Тем не менее тот факт, что он вышел уже четвертым, нисколько их не обескуражил. Они положили шарики в соответствии с этим новым вариантом, продиктовали мне рисунок десятой строчки, а потом разложили остальные бусы — каждые к своему рисунку. А я закончил задание с чувством абсолютного триумфатора.

То, что произошло сегодня, кажется мне крайне важным. Мы не просто решили задачу. Мы решили ее путем сведе́ния к другой, изоморфной ей и уже ранее решенной задаче. Это — важнейшая общематематическая идея, и разве не чудо, что нашелся такой материал, на котором эту идею удалось продемонстрировать шестилеткам? Да к тому же так, что они сами до нее додумались!

Доказательства

События на нашем кружке меняются с головокружительной быстротой. Не успели мы разобраться с одной великой идеей, как тут же на подходе другая. Как-то сам собой возникает вопрос: почему каждый раз получается ровно 10 решений? В самом деле больше решений не существует, или мы просто не сумели их найти? Как *доказать*, что их всего десять?

Итак, доказательство. Центральное понятие для всей математики, я бы даже сказал — *формообразующее*, выделяющее математику из всех других наук. Представление о том, что́ является доказательством и что́ не является, эволюционировало на протяжении веков и обрело современный вид лишь приблизительно на рубеже XIX-XX веков. Математикам прошлых эпох, даже самым великим, казались вполне убедительными такие рассуждения, которые сейчас с негодованием отвергнет любой школьный учитель. Если вдуматься, мы имеем дело с очень странным явлением. Почему какие-то абстрактные и порой совершенно «потусторонние» рассуждения делают для нас то или иное утверждение более убедительным? Один очень умный старшеклассник задал учителю такой вопрос: «То, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, совершенно очевидно — можно убедиться на примерах. Тем не менее нам этот факт доказывают. С другой стороны, то, что электрическое напряжение равно силе тока, умноженной на сопротивление, нисколько не очевидно. Однако этот факт нам почему-то не доказывают, а только иллюстрируют опытами. Почему?» Такой вопрос — редкость. Большинство школьников воспринимают доказательства как некий принятый в математике ритуал. В математике так полагается, и всё тут. Как тут не вспомнить один исторический анекдот, относящийся, кажется, к XVIII веку. Один человек, бравший уроки математики, будто бы сказал своему учителю: «К чему все эти туманные рассуждения! Ведь вы же дворянин, и я тоже. Дайте мне честное слово, что теорема верна — мне этого вполне достаточно».

Но не то же ли самое происходит с нами, когда мы читаем, скажем, учебник истории? Никаких доказательств, одни лишь «формулировки теорем»: было так, было там, было тогда. Точка. И вот оказывается, что «честное слово дворянина» — в данном случае автора учебника — вполне достаточно для того, чтобы всему поверить. На самом деле каждодневная работа математика не так уж сильно отличается от работы историка. Это иллюзия — полагать, что математик находит доказательство и на этом успокаивается, ибо в подавляющем большинстве случаев он производит на свет ложные доказательства. Но он видит, что тем же методом можно доказать, скажем, и иное, заведомо ложное утверждение — и он продолжает поиск, ищет ошибки, ищет противоречия, ищет другие пути к цели. Он *осваивает новую область*. И успокаивается только тогда, когда все части, все детали картины приходят в согласие друг с другом. Примерно такой же гармонии деталей, их согласованности друг с другом ищет и историк, да и любой исследователь. А потом в учебнике нам покажут только кратчайший путь из A в B. Стоит ученику сбиться с этого пути, «свернуть направо на один светофор раньше», и он попадает в совершенно незнакомый район и уже не знает, как оттуда выпутаться. В то время как специалист хорошо знает не только кратчайший путь, но и все окрестности — недаром же он их излазил вдоль и поперек.

Однако дискуссия на эту тему увела бы нас слишком далеко. Поэтому вернемся к детям. Материала, на котором можно знакомить детей с идеей доказательства, не так уж много, но он всё же существует. Например, задачи типа «четвертый — лишний» с неоднозначными ответами. В них важно не только дать ответ, но и правильно его объяснить. Решали мы также и задачи такого типа: доказать, что мы видим глазами, а слышим ушами, но не наоборот (доказательство: если закрыть глаза, мы перестаем видеть, а если закрыть уши, перестаем слышать); доказать, что облака ближе к земле, чем солнце (доказательство: облака заслоняют солнце); доказать, что мы думаем головой, а не животом. Я сам так и не сумел придумать убедительного решения этой задачи[1]; на кружке же я предложил вот какое: если человеку отрубить голову, он перестает думать. Мне возражали, но никто не сказал, что то же доказательство проходит и для живота.

Ну а что могло бы послужить доказательством в нашей комбинаторной задаче? Ясно, что это должен быть *упорядоченный* перебор возможностей, т. е. такой перебор, при котором мы были бы абсолютно уверены, что ничего не пропустили. Год назад мальчики эту идею не восприняли. Может быть, сейчас они уже созрели?

Вернемся к тому обсуждению, рассказ о котором мы прервали на полуслове. Итак, как же убедиться, что, кроме найденных десяти решений, других нет? Дима: «Нужно много лет пробовать, и если ничего не найдешь, значит, и нет». Я возражаю: а вдруг всё-таки есть? Женя пессимистично заявляет: «Я больше ничего найти не смогу». Петя спрашивает у меня, действительно ли я сам не знаю, сколько будет решений, или я-то знаю точно, а спрашиваю только для разговора. Признаюсь, что сам я знаю точно. Тогда мальчики вообще перестают понимать, чего мне еще надо. Выручил меня

[1]Видимо, такого решения и не существует. Сравнительно недавно я узнал, что древние египтяне, приготавливая мумии, аккуратно сохраняли для будущей жизни все органы человека, и только один мозг выбрасывали за явной ненадобностью.

Дима. Он произнес какую-то фразу... Откровенно говоря, я не очень уловил его мысль, и не очень вдумывался, т.к. думал в этот момент о своем. Но во фразе, которую он сказал, фигурировали слова «самая левая коробочка». Я за них ухватился и поспешил интерпретировать всю фразу в нужном мне направлении. Итак: возьмем первый шарик и положим в первую, самую левую коробочку. Куда теперь можно положить второй шарик? Это ясно: в одну из оставшихся, т.е. во вторую, в третью, в четвертую и в пятую. Итого получаем 4 решения. Исчерпав все те решения, когда первый шарик лежит в первой коробочке, положим его во вторую. И опять для второго шарика остается 4 пустых места: мы можем его положить в любую из четырех коробочек, оставшихся пустыми. Теперь кладем первый шарик в третью коробочку, и т.д. Одним словом, мы получаем 5 раз по 4 решения, то есть... 20 решений! Вот так раз! Мальчики в полном ошеломлении, а я как можно скорее сворачиваю все дела и заканчиваю занятие.

Ну, уж на этот-то раз я бил без промаха. Теперь наверняка все будут думать и разбираться, почему для правильного ответа число 20 еще следует разделить пополам.

[Эх, черт побери! Обидно. Этот невыносимо честный Дима (нынешний) заставляет меня признаться, что я тут слегка приврал. Выдал желаемое за действительное. Я потом ужасно огорчался, что не сообразил поступить на кружке именно так, как написано выше. В реальности я вместо этого я объяснил детям, почему будет именно 10 решений, а вовсе не 20, и почему, положив первый шарик во вторую коробку, уже не нужно класть второй шарик в первую. Жаль, красивая история пропала.

После этого был еще долгий спор с Димой. Я сам его не запомнил и в дневник не записал, но вот что потом вставил туда он сам:

◁ Поначалу папин систематический перебор меня не убедил. То ли в конце занятия, то ли уже после, я стал спрашивать: «А вдруг ты всё-таки забыл один способ?» — «Ну, например, какой?» — «Какой-нибудь». — «Например, в какой коробочке может лежать первый шарик?» — «Не знаю; в какой-нибудь». — «Ну, пусть, скажем, во второй». — «Пусть во второй». — «Но ведь тогда второй шарик может оказаться либо в 3-й, либо в 4-й, либо в 5-й коробочке, а мы все эти способы уже перебрали». И тут я почувствовал (хотя, наверно, не признался бы в этом), что, действительно, для 11-го способа не осталось ни одной лазейки: куда бы мы ни положили первый шарик, всегда получится, что мы все такие способы уже перебрали. — Дима. ▷

Так что, может, я и зря расстраивался. И без того понять мои рассуждения было трудно, а тут бы я нагромоздил одну трудность на другую.]

Физика и логика

Хочу рассказать об одной беседе с Димой. Ему 5 лет и 9 месяцев. Задним числом немножко странно, что с таким в общем-то маленьким мальчиком можно вести разговоры на такие серьезные темы. Однако же вот — есть дневник... (С некоторых пор я стал записывать не только то, что происходило на кружке, но и какие-то смежные истории.)

Началось всё с несколько неожиданной и посторонней для нас темы: есть ли Бог? Я обычно уклонялся от прямого ответа (которого я, впрочем, и не знаю), думал — вот вырастет и сам решит для себя этот вопрос. Стратегия не очень успешная, т. к. общался он не со мной одним. Вот и сейчас — он уже от кого-то узнал, что «Бога нет, потому что его никто не видел». Я, как всегда, увел разговор в свою сторону. Я сказал, что если дело обстоит таким вот именно образом, то он никак не сможет меня убедить в том, что существует *мечта* (ее ведь никто не видел, не правда ли?).

Дима сделал несколько подходов. «А у тебя какая есть мечта?» Я ответил, что никакой мечты у меня нет. «Ну, а что ты больше всего на свете хочешь?» Я отвечал, что ничего не хочу. «Но ты ведь хочешь, чтобы я вырос умным?». Это уже было явное моральное давление, но я устоял: сказал, что вообще ничего не хочу, и всё тут.

На некоторое время он задумался; потом задал тот вопрос, из-за которого я, собственно, эту историю здесь и рассказываю: он спросил у меня, как вообще можно других людей в чём-то убедить. «Есть разные способы, — ответил я. — В математике, например, придумывают *доказательства*». — «Как это?», — спросил Дима. Я напомнил ему нашу совсем еще свежую историю про 10 решений и про то, как мы старались сделать наш перебор *систематическим*, чтобы быть твердо уверенными, что мы ничего не пропустили. «А в физике, — сказал я, — делают опыты». — «А-а, понятно». (К тому времени мы уже читали книгу Л. Л. Сикорука «Физика для малышей» и производили некоторые из описанных в ней опытов.) «Вот, например, такой вопрос: какие предметы падают быстрее — легкие или тяжелые?» — «Конечно, тяжелые падают быстрее». — «Ты та́к думаешь. А другой человек может сказать, что все предметы падают одинаково быстро». — «Ну-у, нет!» — «А почему нет?» — «Ну, ведь если мы возьмем камень и лист бумаги, то камень упадет быстрее». — «Вот видишь: чтобы убедить этого другого человека, что он неправ, ты сделаешь опыт, верно? Возьмешь камень и лист бумаги и посмотришь, что упадет быстрее». — «Да». — «А теперь давай сделаем другой опыт».

Идею этого опыта мне подсказал кто-то из друзей. Сначала мы берем два одинаковых листа бумаги, и они, разумеется, падают одинаково медленно.

После этого я комкаю один из листов и скатываю его в плотный комок. Я хочу спросить, какой из двух листов теперь упадет быстрее, но Дима меня опережает. «А теперь вот этот (он показывает на комок) стал тяжелее». — «Почему!?!» — «Потому что он упадет быстрее».

Вот, оказывается, как обстоит дело. Для того, чтобы физический опыт мог вас в чём-то убедить, нужно сначала, чтобы ваша логика развилась до такого уровня, когда вы осозна́ете недопустимость логических кругов. Без логики никакие выводы из наблюдений сделать невозможно. Что же из них первично, а что вторично? Понятия не имею! Видимо, они вырастают вместе в каком-то симбиозе...

Я, однако, не унимаюсь. Мы продолжаем бросать в паре всё, что попадается под руку: пуговицу и большой тяжелый лист ватмана; пуговицу и гирю; пластмассовый пустотелый кубик и деревянный кубик того же размера, и т. п. Дима обескуражен результатами. Попытался было предположить, что пуговица тяжелее листа ватмана, но быстро отказался от этой идеи перед лицом ее очевидной нелепости. «Значит, бывает по-разному. Иногда легкие вещи падают быстрее, а иногда тяжелые». Он уже почти готов удовлетвориться такой квазитеорией. И вдруг — эврика: «А-а, понимаю, папа! Это ему воздух мешает падать». — «Кому?» — «Лист большой, и ему воздух мешает падать, не пускает его. А пуговица маленькая, ей воздух меньше мешает». — «Правильно! А если бы воздуха не было, что бы тогда было?» — «Тогда бы все падали одинаково». — «Молодец. А когда я лист бумаги скомкал в комочек, что произошло?» Дима подбирает слова, чтобы сформулировать ответ. Я не выдерживаю и отвечаю за него: «Воздух ему перестает мешать». — «Нет, — поправляет меня Дима, — не перестает, а начинает меньше мешать».

Читатель уже знает, что один из моих ведущих принципов — это никогда не «внедрять» в ребенка свою точку зрения, даже намеком. Но в иерархии принципов есть еще один, более важный: никогда не следовать безоглядно ни одному принципу. Может быть, сейчас — удобный момент проявить гибкость? С явным намеком на «единственно правильный ответ» я указываю еще раз на скомканный лист бумаги и говорю: «И что, разве он действительно становится при этом тяжелее?» Дима смеется вместе со мной: мол, ну надо же было сморозить такую глупость! Он отвечает: «Ну конечно же нет! Может быть, только совсем немножечко тяжелее».

Вечером, записывая эту беседу в дневник, я обдумываю ее еще раз. Я неожиданно осознаю одно обстоятельство, которое раньше от меня ускользало. То, что мы произвели, не является в точном смысле слова физическим экспериментом. Эксперимент — это вопрос, заданный природе, *с неизвестным заранее ответом.* А в нашем случае Дима знал все ответы заранее. Не обязательно было реально бросать гирю с пуговицей — собственный опыт жизни ребенка в окружающем его физическом мире оказывался вполне достаточным, чтобы правильно предсказать результат этого опыта. Можно сказать, что ни один из опытов не сообщил ему ничего нового — если говорить только о фактах. Новым было лишь сопоставление и упорядочение известных фактов. По существу, мы произвели то же самое доказательство путем перебора логических возможностей, которое раньше проделали с шариками в коробочках. Данная ситуация проливает некоторый дополнительный свет на то, почему в обучении так полезны вопросы. С помощью вопросов мы помогаем ребенку сопоставить те элементы его жизненного опыта, которые до этого существовали как бы отдельно — лежали в кладовке памяти на разных полках и никак друг с другом не связывались.

* * *

Летом мы снимали дачу в Подмосковье, и к нам в гости приехал Петя. Мальчики вспоминали, как они недавно ходили в зоопарк, и как им показывали обезьян. Я вмешался в их разговор и сказал, что это не им показывали обезьян, а их показывали обезьянам. Такая инсинуация с моей стороны не могла не вызвать решительный протест, но они не сразу нашли, что ей противопоставить. «Мы на них смотрели». Такой аргумент разбить легче легкого: «Ну и подумаешь, смотрели! Они тоже на вас смотрели». Второй аргумент был гораздо серьезнее: «Мы можем ходить где хотим, а обезьяны не могут. Они в клетке сидят». Но я и на это нашел, что возразить. «Нет, вы хóдите не где хотите. Например, вам нельзя ходить внутри клетки. А обезьянам нельзя снаружи. Просто есть решетка, и обезьяны ходят где хотят с одной стороны решетки, а вы — с другой». Так мы еще спорили некоторое время, и вдруг Дима воскликнул радостно, как бы поймав меня на подвохе: «Ой, папка! Ведь это же мы опять математикой занимаемся!»

Интересная эволюция... На самом первом занятии кружка дети бросились наперегонки считать разложенные на столе пуговицы. Тогда они именно так представляли себе математику — это когда считают. Теперь математика стала для них чем-то вроде логической игры в стиле Льюиса Кэрролла.

* * *

Немного жаль, что я лишил следующую главу некоторых из ее наиболее лакомых кусочков. Но, во-первых, хотелось показать материал в новом разрезе: читателю трудно было бы самостоятельно уследить за развитием сюжета, прыгая от раздела к разделу. И, во-вторых, то, что я рассказываю в начале этой главы, относится к *незаписанному* периоду, т. е. вообще осталось бы за кадром. Будем надеяться, что кое-что интересное для следующей главы еще осталось.

Глава 4.

Кружок с мальчиками — второй год

Занятие 33. Подобие

19 сентября 1981 (суббота) $11^{05} - 11^{50}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Первый звонок. Дети приходили к нам в дом не одновременно. Пока одного из них не хватало, двое остальных начинали играть, потом к ним присоединялся третий — и оторвать их от игры порой было нелегко. Решение нашлось не там, где мы его искали. У нас сломалась кукла-неваляшка, и от нее остался звонок с необычайно мягким мелодичным звоном. С тех пор достаточно было позвонить в этот звонок — и дети замирали как околдованные, а потом послушно шли на занятие. Только иногда просили разрешения сами немножко позвонить.

Итак, прозвенел первый звонок. Я поздравил всех с началом учебного года, рассказал, что в школе всегда бывает праздник первого звонка.

Задание 1. Устные вопросы.

(1) Два брата, младший и старший, вышли на улицу со своими велосипедами и покатились на пяти колесах. Как это могло получиться?

К моему удивлению, ребята долго не могли придумать правильный ответ, вместо этого они изобретали какие-то четырехколесные велосипеды. Потом Дима догадался.

◁ На самом деле я догадался давно, но не говорил, потому что никогда не видел чтобы кто-нибудь катался на трехколесном велосипеде на улице. Так что правильный вариант я отмел, а потом вслед за всеми стал придумывать варианты с одноколесными велосипедами. Потом я вспомнил, что одноколесные велосипеды видел только в цирке, так что это еще более невероятно, чем трехколесные, и тогда сказал первоначальный вариант. — Дима. ▷

(2) Упрощенная «дурацкая штучка» Смаллиана (название дано самим Смаллианом): я показываю сжатый кулак и говорю: «У меня здесь две монеты, дающие вместе 3 копейки, но *одна из них — не копейка*. Что это за монеты?» [Разгадка в том, что хотя одна из них — не копейка, зато другая — копейка.]

Результат опять обескураживающий. Сначала дети никак не могут придумать вариант, дающий в сумме 3 копейки. Потом, когда наконец Дима предлагает 1 коп. + 2 коп., все уже давно забыли про второе условие. Я пытаюсь его напомнить: «Но ведь сказано, что одна из них не копейка». — «Да, — говорит Дима, — не копейка, а монетка». Я открываю ладонь, спрашиваю: «Верно, что одна из этих монет — не копейка?» — «Да». — «И где же она?» Ребята указывают на 2 коп., не выказывая ни малейшего удивления. Мне приходится отступить.

Задание 2. Операции над множествами.

На двух больших карточках нарисованы два множества предметов — A и B. На пяти карточках поменьше нарисованы множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$. Я каждый раз говорю, какую карточку надо найти. Например: «где нарисованы те предметы, которые есть на на картинке A и которых нет на картинке B?», «где нарисованы те предметы, которые есть и на той, и на другой картинке?» и т. д. Ребята отвечают очень быстро и без ошибок. Довольно трудно выразить обычными словами разницу между объединением и пересечением. В обоих случаях нужно говорить: это те предметы, которые есть и там, и там.

Дима говорит: «Я вообще не понимаю, почему все эти предметы нарисованы на одной картинке», — т. е. он не понимает, по какому принципу они объединены. Я объясняю, что никакого принципа нет.

Задания на будущее.

(1) Активный вариант: ребята должны не отыскивать карточки из готового набора, а сами их рисовать (для этого элементами множества можно сделать простые значки).

(2) То же, но связать с множеством предметов, раскладываемым на столе в двух веревочных кругах (в качестве элементов множеств можно взять цифры, в качестве предметов на столе — плашечки с цифрами из математического набора первоклассника).

Задание 3. Подобие.

Я рисую на клетчатой бумаге несколько фигурок, а потом такие же фигурки в два раза большего размера (рис. 4.1).

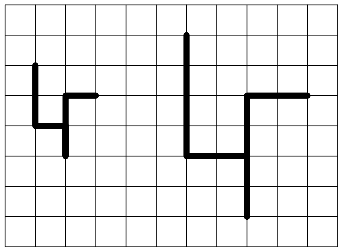


Рис. 4.1. Подобные фигурки: одна вдвое больше другой.

Объясняю, что требуется сделать — предполагается решать задачу на мозаике. Затем по очереди строю на мозаике фигурки и предлагаю ребятам построить вдвое бóльшие. Они легко справляются, но я в процессе работы неожиданно понимаю, что плохо продумал задачу. А именно, я замечаю две трудности (дети их не замечают):

1) Они, естественно, каждую фишку заменяют двумя; но как тогда поступать с угловыми фишками? Ребята их тоже удваивают, но результат зависит от того, с какого конца они начинают работу (рис. 4.2).

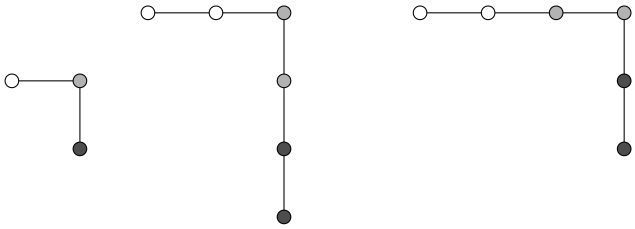


Рис. 4.2. Как удвоить уголок на мозаике?

2) Точки-фишки можно по-разному собирать в «созвездия», то есть поразному интерпретировать в виде линий; так, я построил для Жени фигурку из 6 фишек, показанную на рис. 4.3 слева, но Женя воспринял ее иначе (на том же рисунке справа), и именно такую фигурку стал удваивать.

Я честно обсудил с ребятами обе трудности, сказав, что в следующий раз то же самое задание будет на клетчтатой бумаге, и тогда никаких двусмысленностей уже не останется.

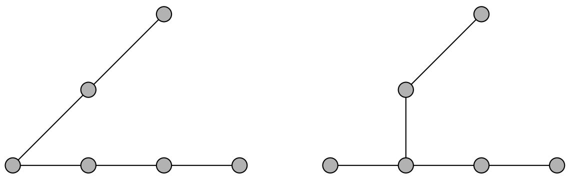


Рис. 4.3. На мозаике имеются только «точки», но, чтобы удвоить фигурку, их надо мысленно соединить линиями; однако сделать это можно по-разному.

Задание 4. «Более вероятно», «менее вероятно» (игра с фишками).

Я говорю: «И, наконец, последнее задание...» Ребята меня перебивают: «Почему последнее? Мы хотим еще!» Ах, бальзам на раны! После того страшного удара, когда они от меня сбежали, мне так необходимы эти подкрепления!

На столе «доска» — лист бумаги, расчерченный на клетки, 7×15 клеток. Под клетками по горизонтали подписаны числа от 1 до 15. Играем мы вчетвером (четвертый — я). Каждый получает по три фишки, одну большую и две маленькие, все три одного цвета. Игроки ставят фишки на первой горизонтали. Потом мы все по очереди бросаем две игральные кости, суммируем число очков (заодно упражнение в арифметике!), и та фишка, номер которой совпадает с выпавшей суммой, делает шаг вперед. Выигрывает та фишка, которая первой выйдет на верхнюю (седьмую) горизонталь. Если у игрока выиграла большая фишка, он получает 2 коп., если маленькая — 1 коп.

Цель задания: (а) напомнить о существовании невозможных событий (суммы $1, 13, 14, 15$ невозможны); (б) показать на опыте, что среди возможных событий бывают более вероятные и менее вероятные (некоторые суммы имеют больше шансов выиграть, чем другие).

Игру мы провели два раза, хотя ребята хотели еще. Про невозможные суммы ребята сами не догадались, но я где-то в процессе игры спросил, почему же эта фишка (единица) совсем не двигается, и они всё объяснили (Дима первым дал правильный ответ). После этого я поинтересовался, какие еще комбинации невозможны, и они тоже правильно ответили. Про разновероятность мы ничего не обсуждали, так как не оставалось времени — я решил отложить это на следующий раз. После первой игры Дима сказал, что хочет поставить свою фишку на 6 (цифра, выигравшая в предыдущей игре), однако поставил маленькую фишку. Выиграл оба раза Женя, первый раз на 6, второй раз на 7.

Занятие 34. Без событий

3 октября 1981 (суббота) $11^{05} - 11^{35}$ (30 мин.)
(Дима, Женя)

Петя болеет скарлатиной; из-за этого предыдущая суббота была пропущена. Для того, чтобы, с одной стороны, не получилось месячного перерыва, а, с другой — Петя не слишком много пропустил (да и с двумя заниматься менее весело, чем с тремя), мы решили провести в промежутке одно занятие, чтобы вышло два интервала по две недели. Таким образом, следующее занятие планируется на 17 октября.

Задание 1. Устные вопросы (из В. А. Левина) типа: у человека — рука, у курицы — ? Вопросов задал мало и они были не очень систематичны.

Задание 2. Подобие (удвоение фигурок) — на этот раз на клетчатой бумаге: я рисую фигурку — вроде той, что на рис. 4.4, — а мальчики должны нарисовать вдвое бóльшую.

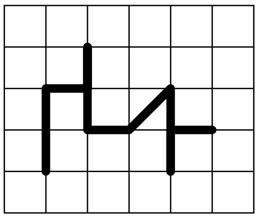


Рис. 4.4. Удвоить фигурку на клетчатой бумаге.

Справляются в целом хорошо, хотя иногда допускают ошибки. Карандаш я им дал с ластиком, и мы им иногда пользуемся. Дима удвоил три фигурки, Женя две.

Задание 3. Снова играем в вероятностную игру. В первой партии выиграл Дима (сумма 5), во второй — я (тоже 5).

На этот раз мы более подробно обсуждали, какие события невозможны, какие числа более выгодны и даже — почему. Я показал им, что числа 2 и 12 можно получить только одним способом, а другие числа — бóльшим количеством способов. Договорились в следующий раз составить «табличку» — т. е. по существу таблицу сложения до 6, а также поиграть еще. Так недолго дойти и до вычисления вероятностей!

Занятие 35. Почти что подсчет вероятностей

24 октября 1981 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

17 октября болел Дима, так что в итоге перерыв составил три недели вместо предполагаемых двух.

Задание 1. Устные вопросы. Те же устные вопросы, что и в прошлый раз (с предисловием, что Петя их не слышал). На этот раз прошелся по всему списку примеров, приведенных В. А. Левиным в журнале[1].

Задание 2. Операции с множествами. На одной картинке нарисованы квадрат, крест, круг, звезда и полумесяц; на другой — треугольник, стрелка, крест и полумесяц. У ребят — листки бумаги и карандаши. Требуется по очереди нарисовать пересечение, обе разности, объединение и симметрическую разность множеств.

Ребята справляются с заданием хорошо. Снова в постановке задачи у меня возникла та же проблема, что и в прошлый раз: очень трудно на обычном разговорном языке четко противопоставить объединение и пересечение: «те фигурки, которые есть и здесь, и здесь» — это что, пересечение или объединение? Из-за нечеткости вопроса и дети часто дают противоположные ответы.

Когда рисовали симметрическую разность, Петя нарисовал объединение, а потом пересечение зачеркнул и показал стрелкой, что его надо убрать с листка.

Задание 3. Прямоугольники. Между делом я задал вопрос, сколько прямоугольников нарисовано на такой фигурке (рис. 4.5).

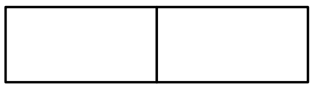


Рис. 4.5. Сколько здесь прямоугольников?

Ребята, конечно, ответили, что их два. Я показал, что их три. Эту тему можно развить.

[1]Типичный случай: не только не помню точной ссылки, но даже и — о каком журнале идет речь. Читатель должен постоянно иметь в виду, что я ни в какой момент не считал себя профессионалом раннего обучения, так что и занимался этим делом не систематически, а как бог на душу положит.

Задание 4. Игра с фишками и почти что подсчет вероятностей.

Мы еще раз сыграли в игру с фишками. Выиграл Женя на 7. В один момент посреди игры, когда фишки выстроились особенно явным клином, как на рис. 4.6, я показал это детям и сказал, что, мол, вот видите, чем ближе к середине, тем больше фишка продвинулась вперед.

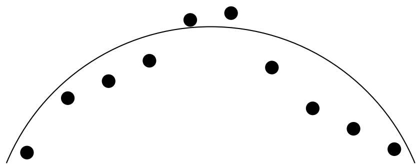


Рис. 4.6. Расположение фишек в процессе игры.

Закончив игру, мы стали составлять табличку: написали все варианты того, что может выпасть на каждом из кубиков, и стали вычислять суммы (табл. 4.1).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 4.1. Таблица сложения в пределах шести.

Но почти сразу ребята обнаружили закономерность и диктовали мне содержимое таблицы без всяких вычислений. Потом, когда таблица была готова, я сказал, что мы ничего не вычисляли, а только угадали закономерность, поэтому будет интересно проверить, всё ли правильно. Для проверки мы вычислили содержимое нескольких клеточек и убедились в совпадении.

Еще в процессе составления таблицы Петя заметил, что одинаковые цифры идут рядами, параллельными побочной диагонали. Мы это обсудили все вместе. Я спросил: «Какая цифра встречается чаще всех — какой ряд самый длинный?» Ребята хором ответили: «Шесть». Это значит, они учли также цифры, стоящие за разграничительной линией таблицы (т. е. не только суммы, но и слагаемые).

◁ Я как раз хотел спросить, считаются ли они, но не успел. — Дима. ▷

Я, конечно, должен был предусмотреть такой исход, и в качестве входов таблицы поставить не цифры, а рисунки граней кубика, как на рис. 4.7.

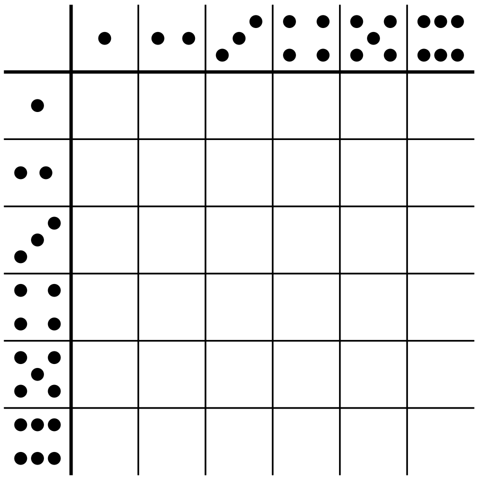


Рис. 4.7. Надо было записывать суммы вот в такую таблицу — тогда не возник бы вопрос о том, какие числа следует учитывать, а какие нет.

Пришлось проводить линию более толсто и объяснять, что внутри таблицы стоят суммы очков на двух кубиках, а с краю — очки на одном кубике, поэтому крайние числа не считаются.

Постепенно мы во всём разобрались и даже угадали закономерность, сколько раз встречаются суммы $2, 3, 4, \ldots, 12$. Результат показан в табл. 4.2.

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Сколько раз встречается	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Таблица 4.2. Суммы очков на двух костях и сколько раз встречается каждая из сумм.

(Конечно же, при переходе от 7 к 8 ребята сначала ошиблись и сказали, что сумма 8 встречается 7 раз (вместо 5)).

Наконец, я спросил: «Ну вот, теперь вы знаете, какие цифры выпадают чаще, какие реже. Как бы вы теперь поставили свои фишки, если бы можно было выбирать?» И Дима в ответ поставил большую фишку на 7, а рядом две маленькие — на 6 и на 8. Я его похвалил и объяснил, что всё правильно.

Занятие 36. Игра с тремя костями

31 октября 1981 (суббота) $11^{05} – 11^{50}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Игра в цепочку (по В. А. Левину).

Я объясняю правила: нужно по очереди называть слова, причем каждое слово должно быть связано с предыдущим какой-нибудь связью: ассоциативной, предметной, по смежности, по сходству, по контрасту, наконец, рифмой. Вот какая получилась цепочка:

> проигрыватель — иголка — нитка — катушка — подушка — кадушка — вода — дно — песок — камень — спотыкаться — ходить — прыгать — плавать — пузырь — пленка — мыло — картошка — подсолнечное масло — маргарин.

Играли мы вчетвером, с моим участием, а Алла записывала.

Задание 2. Снова два листка, на одном нарисованы цифры $1, 3, 5, 7, 9$, на другом — $4, 5, 6, 7$. Я выкладываю 10 плашек со всеми цифрами из «математического набора первоклассника». Первое задание для всех: выбрать только «нужные» цифры (т. е. объединение), а остальные убрать. Дальше задания по очереди Пете, Диме и Жене: выбрать $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$. После того, как эти три части разложены по отдельности, я кладу на стол два веревочных кольца в виде диаграммы Венна (рис. 4.8) и раскладываю цифры в них. Мы обсуждаем тот факт, что одна веревочка в точности соответствует одному листку, а другая — второму листку, и поэтому само собой получается так, что в общей части оказываются общие цифры, а «здесь» (показываю) только те цифры, которые есть на картинке A и которых нет на картинке B и т. д. и т. п.

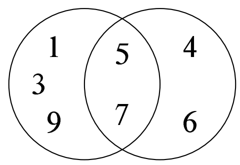


Рис. 4.8. Пересекающиеся множества.

[Надо было проделать то же самое с маленькими карточками из самого первого задания на операции со множествами — там, где нарисованы кошка, яблоко, ваза и т. п.]

Задание 3. Я говорю: «Сегодня мы будем играть в новую игру, в которой нужно будет бросать сразу три кубика. Скажите, какое самое маленькое число может получиться в сумме?» — «Три!» Мы разбираем, как получается три. «А самое большое?» — «Три шестерки!» Мы считаем, сколько это будет.

Я достаю планшетку, на которой в больших клетках нарисованы числа от 3 до 18, как показано на рис. 4.9.

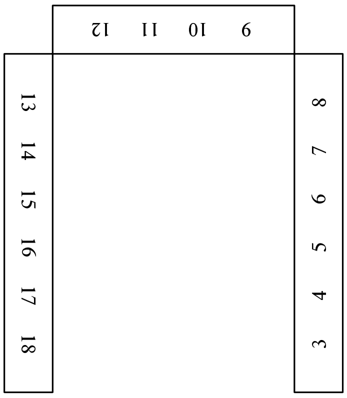


Рис. 4.9. Планшетка для игры с тремя кубиками.

Для красоты сторона 3 – 8 закрашена в желтый цвет, 9 – 12 — в красный, 13 – 18 — в зеленый. Красный цвет для выигрывающей стороны я выбрал нарочно (см. занятие 31, п. 4), и так же нарочно избегал синего. Вот только синестезия желтого цвета мне не ясна.

Я начинаю объяснять правила: каждый садится против одной из сторон (они тут же садятся — Женя против 3 – 8, Дима против 9 – 12, Петя против 13 – 18); каждый получает одинаковое количество жетонов (мы взяли по 9 жетонов); на каждом шаге каждый игрок выставляет по одному жетону; затем бросают три кости, и тот, на кого выпадет сумма, получает все три жетона. Игра идет до «полного разорения» двух игроков (когда все жетоны скопятся у одного их них).

Я показываю, какие у каждого числа, говорю: «У Жени шесть чисел, и у Пети шесть чисел, у Димы, правда, всего четыре числа. . . » — «Ну ничего, неважно», — соглашается Дима.

◁ Мне хотелось скорее начать играть, поэтому я не очень внимательно слушал, что папа говорил. Перед тем, как мы начали играть (и уже после того, как я сказал «неважно»), я понял, что у меня чисел меньше, и я могу проиграть. Но мы начали играть, и я снова забыл. — Дима. ▷

Кости мы бросаем по очереди (и я тоже); тот, кто бросает, должен вычислить сумму. Интересно, что ребята очень охотно (и по многу раз) делают довольно сложные для них вычисления — то, что в другой ситуации они делать ленятся.

Игра длится слишком долго, а конца всё не видно. Поэтому мы договариваемся запомнить, сколько жетонов осталось у каждого, и продолжить в следующий раз. *Осталось: у Жени — 2, у Пети — 11, у Димы — 14.*

[Интересная задача для меня: найти ожидаемую продолжительность игры, а также вероятность «ошибки», т. е. разорения среднего игрока.]

Занятие 37. Сколько прямоугольников?

14 ноября 1981 (суббота) $11^{05} - 12^{00}$ (55 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Предыдущая суббота пропущена из-за праздника.

Задание 1. Цепочка (зарядка для ума):

картинки — краски — кисточки — дерево — корень — сорняк — вода — лед — коньки — кататься — человек — сапог — Италия — карта — стена — дом — нора — хомяк — животное — глаз — очки — лупа — стекло — рама — велосипед — колесо — шина — тормоз — поезд — дым — труба.

Интересно, что даже через 20 лет можно определить, какие ассоциации принадлежат Пете. Сапог — Италия! Сразу видно ребенка из гуманитарной семьи.

Задание 2. Задание с пересечением (не сделанное в прошлый раз). Две большие карточки (задание № 33-2) и маленькие карточки из того же задания. На маленьких карточках нарисованы объединения, пересечения, разности множеств, изображенных на больших карточках. Я кладу две пересекающиеся веревки и прошу ребят разложить карточки так, чтобы внутри одной веревки получилась картинка A, внутри другой — картинка B. То есть, когда ответ будет готов, среди веревок окажутся только карточки $A \setminus B$ (слева), $A \cap B$ (в середине) и $B \setminus A$ (справа) — остальные маленькие карточки потребуются только «для справки».

Сначала, как водится, возникает сумятица: все кладут что попало, спорят, отнимают друг у друга карточки. Потом устанавливается порядок и мы начинаем работать более систематично. Из обсуждения видно, что Дима ничего не понимает; про Женю сказать трудно, так как он ограничивается лишь отдельными замечаниями; один Петя сразу и без слов положил нужные карточки на нужные места.

После того, как правильное решение получено, мы его тщательно проверяем и еще дополнительно выясняем смысл объединения.

Задание 3. Найти все прямоугольники. Все ребята по очереди получают листок с нарисованным на нём прямоугольником, разделенным средними линиями на четыре части (рис. 4.10). Требуется находить и заштриховывать по очереди все имеющиеся на этом рисунке прямоугольники (всего 9 штук).

Рис. 4.10. Найти все прямоугольники (их здесь 9 штук).

Ребята справляются с заданием очень хорошо, практически не допуская ни одной ошибки. Женя первый нашел «оригинальное» решение: заштриховал весь большой прямоугольник тогда, когда не были еще использованы все уголки, и он же первый заштриховал вертикаль из двух частей. Дима, видя, что я похвалил Женю за оригинальное решение, стал искать что-нибудь еще более необычное: сначала заштриховал уголок (рис. 4.11 слева), а потом прямоугольник, ограниченный линией, отсутствующей на рисунке (рис. 4.11 справа).

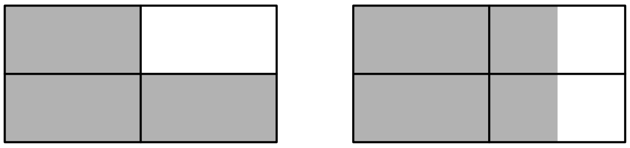


Рис. 4.11. Эти решения неправильны, но... У левой фигуры в самом деле все шесть углов — прямые! Чем не «прямоугольник»?

Я оба решения отверг: про первое объяснил, что это не прямоугольник (мы посчитали углы, и их оказалось шесть), а про второе сказал, что таких решений можно придумать бесконечно много.

Когда все варианты были исчерпаны, я пытался натолкнуть ребят на мысль, что больше решений нет, но ничего не вышло. Тогда я сам им это объяснил, добавив, что самое интересное в задаче — объяснить, почему мы уже нашли все возможные решения и никаких других не осталось.

Задание 4. Доигрывание отложенной партии (в игре с тремя кубиками).

Женя получил свои 2 жетона, Петя — 11, Дима — 14, и мы продолжили игру. Довольно скоро разорился Женя. Теперь Дима и Петя ставили по одному жетону, а выигравший получал два жетона, а не три. (Если сумма выпадала «на Женю», то она не учитывалась.) Тем не менее, игра пошла быстрее, так как теперь Димино преимущество было более явным. Женя продолжал участвовать на общих основаниях в бросании костей и подсчете суммы очков. Когда стало ясно, что Петя близок к разорению, Дима стал изо всех сил «стараться», чтобы сумма выпала на Петю. Это дало мне лишний повод заметить, что исход случайного события не зависит от наших стараний. Наконец, Дима выиграл. Я спросил: «Как же так? Дима выиграл — значит, сумма гораздо чаще выпадала на него, чем на других. А клеточек у него всего четыре, а у других — по шесть». Началось обсуждение. Ребята быстро пришли к выводу, что одни числа выгоднее других, и даже объяснили, что это из-за того, что «комбинаций больше». Мы рассмотрели для примера, сколько комбинаций дают сумму 3, и сколько дают 10. Однако дальнейшие объяснения ребята слушали уже невнимательно, так что на этом я занятие окончил, хотя Петя просил еще и предлагал поиграть с мозаикой.

Занятие 38. Всё валится из рук

29 ноября 1981 (воскресенье) $17^{20} - 17^{50}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Одно из самых неудачных занятий.

Предыдущая суббота было опять пропущена, так как я все дни ходил на работу, а в пятницу был урок[2], так что, во-первых, я не выспался, во-вторых, не подготовился. В субботу, 28-го числа, Дима был назначен к зубному; получалось, что придется пропустить еще одно занятие. Тогда мы договорились позаниматься в воскресенье, в 17^{00}. Однако Женя вовремя не пришел, и телефон у них дома не отвечал. Я решил, что его уже не будет, и предложил Диме с Петей снова поиграть в игру с тремя кубиками (см. два предыдущих занятия). Но в самый разгар игры пришел Женя. Пришлось

[2]Реалии тех лет начинают забываться. Я ходил на работу три раза в неделю — остальные два дня были «библиотечными». Но иногда наступал аврал — особенно к концу года, когда надо было писать отчеты. Кроме того, я, как и очень многие в моем положении, подрабатывал репетиторством.

игру прекратить. Дима и Петя ныли; я раздражался. В начале занятия Дима, как это часто с ним бывало, сидел плохо: шатался во все стороны, потом лег на стол. Я сделал ему два замечания, потом вспылил и сказал: «Еще одно замечание — и я тебя выгоню» (сказалось также и то, что за обедом ругались на ту же тему). Дима на глазах прямо посерел и ушел в себя. У меня тоже настроение испортилось: я чувствовал, что поступил несправедливо (не столько в словах, сколько в интонации), и, кроме того, мучился от мысли, что повторение таких сцен может создать у него неприятные подсознательные связи с занятиями, с математикой вообще и т. п. Изо всех сил я пытался к первому заданию привести себя в веселое расположение духа, делал глубокие вздохи, паузы, но это мало помогало.

Задание 1. Игра «Чем свяжешь?» (снова заимствовано у В. А. Левина).

Задаются крайние члены цепочки, надо соединить их промежуточными. Я привел пример: «художник — ? — виноград» (промежуточное звено — кисть). Однако ребята ничего не поняли и стали предлагать свои варианты: «А еще у них общее то, что художник любит виноград». Так продолжалось и дальше. Вопрос: «девочка — ? — трава» (коса); ответ: «девочка лежит на траве». Вопрос: «рыба — ? — кошка» (хвост); ответ: «рыба живая и кошка живая». (Честно сказать, и сам вопрос про рыбу с кошкой — не очень удачный.) И тому подобное. Я говорил, что нужно придумать в качестве ответа одно слово; тогда они вообще замолкали; было скучно.

Задание 2. На какие части можно разрезать прямой линией невыпуклый четырехугольник?

Всего существует 15 вариантов:

(а) два треугольника — 3 способа;

(б) три треугольника — 1 способ;

(в) треугольник и четырехугольник — 6 способов;

(г) треугольник и пятиугольник — 3 способа;

(д) два четырехугольника — 2 способа.

Сначала мы порисовали на бумаге разные многоугольники, считали в них количество углов. Дима по своему обыкновению нарисовал вместо многоугольника ломаную. Я объяснил, что такую фигуру обычно не называют многоугольником, но объяснил как-то сбивчиво и никак не мог придумать «детского» синонима к слову «замкнутый».

Потом я спросил, можно ли назвать многоугольником фигуру, образованную четырьмя дугами (рис. 4.12) (ведь у нее четыре угла!).

Объяснил, что нет.

После этого я дал ребятам вырезанный из картона невыпуклый четырехугольник (рис. 4.13); прямую должна была изображать металлическая

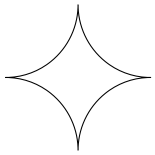


Рис. 4.12. Эту криволинейную фигуру обычно четырехугольником не называют

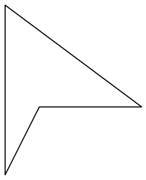


Рис. 4.13. Невыпуклый четырехугольник.

палочка; ребята должны были с ее помощью изображать различные способы разрезания, а я их зарисовывал.

Сначала мне никак не удавалось навести порядок и добиться того, чтобы мальчики дослушали задание до конца: они рвали друг у друга четырехугольник, пытались рисовать на нём карандашом, а когда я отобрал карандаши — пытались царапать на нём палочкой, изображая разрез.

Потом дело неожиданно пошло на лад. Когда ребята наконец поняли суть задачи, они стали очень свободно и изобретательно придумывать разные способы разрезания, не повторяясь и каждый раз правильно определяя, какие многоугольники получаются в результате. Обстановка оживилась.

В этот момент неожиданно позвонил А. В. Ч. Человек очень уважаемый; хоть он меня очень вежливо спрашивал, не занят ли я и могу ли сейчас разговаривать, у меня не хватило духу сказать, что занят. В результате дети прождали меня 10 минут, томясь от безделья, и мамы отпустили их гулять.

Занятие 39. После спада — подъем

5 декабря 1981 (суббота) 11^{20} – 12^{20} (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Это занятие, по контрасту с предыдущим, было одним из самых лучших, что видно хотя бы уже по его длительности. Кроме того, я, видимо, был сильно возбужден первым применением своего столь долго вынашиваемого языка программирования «Малыш».

Задание 1. Задачи на доказательство.

(1) Доказать, что мы слышим ушами, а не глазами.

(2) Доказать, что мы видим глазами, а не ушами.

(3) Доказать, что облака ближе, чем Солнце.

Ответы на все вопросы дал Дима, опередив остальных. Подробно писать не буду, так как эти задачи уже обсуждались в предыдущей главе.

Задание на дом: доказать, что мы думаем головой.

Задание 2. Мы вместе со Стёпой[3] изобрели язык программирования для дошкольников (мне кажется уместным назвать его «Малыш»). Так как некоторые стадии его обдумывания связаны с ранними занятиями, не отраженными в дневнике, да и сам язык требует самостоятельного описания, я сделаю здесь длинное отступление.

Небольшой экскурс в прошлое

1. На одном из занятий из числа первых двадцати, не попавших в дневник (точный номер его я не помню — кажется, где-то в районе № 15), дети получили следующее задание: я построил на столе башенку из деревянного конструктора (рис. 4.14) и попросил ребят построить башенку точно такой же высоты, но только на полу.

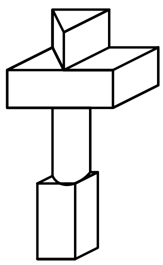


Рис. 4.14. Эта башенка стоит на столе. Как построить башенку такой же высоты, но на полу?

Еще когда Диме было всего три года, я давал ему аналогичное задание на ступеньках крыльца на даче. Тогда он видел свою задачу в том, чтобы вершины башенок находились на одинаковом уровне. Сейчас он, как и все

[3]Степан Пачиков, наш близкий друг; в дальнейшем — организатор Московского детского компьютерного клуба и компьютерной фирмы ПараГраф. Живет в США.

остальные, уже понимал, что высота является инвариантом перемещения. Поэтому он строил башенку примерно нужной высоты, а потом брал ее за верх и за низ и пытался приложить к башенке, стоящей на столе. К его сожалению — и к моей тайной радости — башенка, которую он пытался поднять к столу, всё время рассыпáлась.

После третьей неудачной попытки я ввел новое правило: башенки не трогать и никуда не переставлять. Последовала минутная пауза. Потом вдруг Дима закричал: «А-а, я понял, понял!», — и построил на полу башенку в точности из тех же элементов конструктора и в той же последовательности, что и у башенки на столе.

Такое решение оказалось для меня несколько неожиданным; я почему-то не предусмотрел его заранее. Тем не менее я, вопреки своей обычной неповоротливости, похвалил ребят и сказал, что они молодцы и с задачей справились (и в самом деле, я ведь вначале никак не фиксировал, из какого материала следует строить башенку на полу).

«А теперь другое задание, посложнее», — сказал я. — «Нужно построить башенку такой же высоты, но только вот из этих (пластмассовых, разноцветных, стандартного размера) кубиков».

Опять воцарилась пауза, на этот раз более длительная. Мне очень не хотелось заканчивать задание на минорной ноте, поэтому я, вопреки своему правилу, решил сделать подсказку. Как бы невзначай я положил на стол веревочку и сказал: «Думайте, думайте». Они тут же схватили веревочку и стали ее вертеть по-всякому, но как ее применить, не знали; в основном, прикладывали ее концами к вершинам обеих башен. Тогда я принес палочку и сказал: «Может быть, палочка поможет». Но и палочка не помогла — они тоже прикладывали ее к вершинам, получая наклонную линию. Пришлось дать еще одно наводящее соображение: «А что выше — палочка или вот эта башенка?» Оказалось, что палочка выше, но зато на ней есть царапина ровно в том месте, где кончается башенка. Это, наконец, натолкнуло на идею, и ребята построили вторую башенку на полу ростом до той же царапины.

2. Примерно через три занятия мне пришла в голову замечательная идея: оформить процедуру построения башенки в виде алгоритма. Вот как это реально выглядело.

Во-первых, я еще раз дал им задание на построение башенки. На этот раз они справились с заданием идеально и быстро, что, кроме всего прочего, продемонстрировало хорошее усвоение материала. «А теперь, — сказал я, — давайте подумаем, какие действия мы делаем и в какой последовательности». И, конечно, получил естественный ответ: «Сначала ставим несколько кубиков, потом измеряем, и тогда один кубик или прибавляем, или убавляем» (действительно, при первоначальном построении башенки на глаз они ошибались не более чем на один кубик). Я стал нудеть, что надо разбить задачу на самые маленькие действия, например, ставить всего по одному кубику, а не сразу много и т. п.

После этого я им показал вырезанные заранее карточки из плотной бумаги. На них было (Аллой) нарисовано следующее:

1) прямоугольная карточка: мальчик ставит кубик;

2) прямоугольная карточка: мальчик измеряет башенку (на полу);

3) карточка-ромбик: в ней большой вопросительный знак (имеется в виду молчаливый вопрос: ну как, равны?);

4) карточка-прямоугольник поменьше: на ней (печатными буквами!) написано слово КОНЕЦ;

5) еще из той же плотной бумаги был вырезан набор стрéлок — несколько маленьких одинаковых стрелок и одна длинная; на двух маленьких стрелках были написаны слова ДА и НЕТ.

Показав всё это, я спросил, в каком порядке нужно делать нарисованные здесь действия. Такой тип вопросов был уже ребятам знакóм, так как до этого они выполняли два следующих задания:

(А) Определить порядок утренних дел (одевание, умывание, просыпание, завтрак, катание на санках, зарядка, потягивание в кровати и т. п.) — из книги Тамаша Варги «Блок-схемы, перфокарты, вероятности».

(Б) Определить, в каком порядке следует надевать различные предметы одежды и обуви (трусы, майку, носки, ботинки, рубашку, брюки, свитер, шубу, шарф, шапку).

В первом случае получается линейный порядок, или «программа без ветвления», во втором — частичный порядок, или, если угодно, недетерминированный алгоритм.

Поэтому в данном случае ребята правильно объяснили последовательность действий, а когда потребовалось снова вернуться к блоку «мальчик ставит кубик», я жестом фокусника извлек длинную стрелку, и получилась изображенная на рис. 4.15 блок-схема.

3. Сейчас, задним числом, всё изложенное кажется мне не очень удачным. Есть два дефекта в самой реализации: первый — плохо выражена проверка условия; второй — куда-то исчезла операция измерения той башенки, что на столе (ее надо было предпослать первому блоку). Еще более важен другой недостаток — неестественность конструкции. Ребята прекрасно поняли, чтó я делаю, но совершенно не поняли, зачем и почему именно так. Я уже говорил, что реально в жизни они поступали иначе: ставили сразу несколько кубиков, после чего хватало одного-двух измерений.

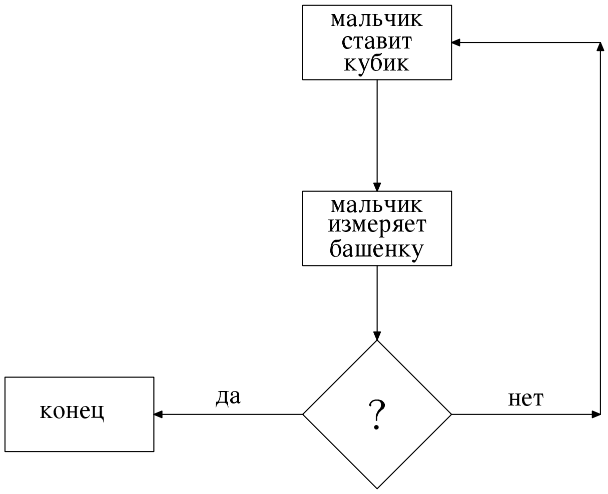


Рис. 4.15. Алгоритм построения башенки нужной высоты.

Тем не менее осталась общая идея — придумывать задачи на построение алгоритмов, и остались также некоторые принципы, сохранившиеся в окончательном проекте.

Принцип 1. Задавать алгоритмы не с помощью какого-нибудь «записываемого» языка программирования (или даже обыденного языка) — ведь ребята ни читать, ни писать не умеют, за исключением самых простых слов, — а задавать их блок-схемами.

Принцип 2. Блок-схемы не рисовать на бумаге — рука у детей очень уж нетвердая, — а выкладывать из готовых карточек. (Самое трудное и обременительное следствие этого принципа — необходимость выреза́ть большое количество стрелок разной длины.)

Принцип 3. Операторы и логические условия на карточках должны изображаться не словами, а простыми и понятными картинками. Лучше всего даже — простыми условными значками.

Кроме того, чисто эстетически оказалось очень приятным раскладывать белые карточки на черном лакированном фоне журнального столика.

Однако долгое время я не мог придумать ни одной новой задачи. Идеи приходили в голову разные — от того, как подниматься на нужный этаж на лифте, до того, чтобы вытаскивать из мешка шарики разных цветов и раскладывать по двум урнам. Но всё это были процессы либо плохо алгоритмизуемые, либо неинтересные и неестественные. А идея алгоритмического языка казалась мне совсем недостижимым идеалом: если я не могу придумать *одну* задачу, то что уж говорить о классе задач! К тому же меня несколько угнетала мысль о том, что даже если я придумаю несколько задач, то для каждой из них придется делать новые рисунки.

4. После многочисленных обсуждений со Стёпой современного программирования вообще и программируемых игрушек со встроенными микропроцессорами в частности я сумел, наконец, сформулировать для себя самого (а потом и для Стёпы) главную трудность, главное препятствие на пути создания языка программирования для детей.

Ясно, что этот язык должен быть узким по возможностям, а, значит, и узко специализированным. Все известные мне языки специализируются либо на работе с числами (ФОРТРАН, АЛГОЛ), либо на обработке данных (КОБОЛ), либо на обработке текстов и списков (ЛИСП, СНОБОЛ); кроме того, есть универсальные языки, обладающие всеми тремя возможностями (ПЛ, АЛГОЛ-68)[4].

Однако все эти три области применения программирования совершенно непонятны и неинтересны детям (ближе всего к их интересам стоят числа, но чтобы ощутить смысл задач, подлежащих алгоритмизации, им надо подрасти как минимум лет на пять). Значит, проблема в том, чтобы придумать доступную детям область применения языка. А сам язык — дело второе.

Через два дня после телефонного разговора, в котором я сформулировал Стёпе постановку задачи, он придумал гениально простое решение: в качестве области применения языка он предложил движение объектов по лабиринту, изображенному на клетчатой бумаге. Он же предложил вначале в качестве наиболее простого лабиринта взять прямоугольную комнату.

После этого мы с ним независимо друг от друга придумали совершенно одинаковый язык — даже обозначения все, кроме одного, совпали; такое совпадение служит доказательством естественности языка.

Язык программирования Малыш

Тогда, в 1981 году, уже существовал язык программирования для детей Logo. Он был основан на том же принципе — тоже управлял движениями некоего объекта — «черепашки», но был гораздо более разработан и, главное, реализован на компьютере. Поэтому наша разработка выглядит сегодня чем-то вроде изобретения деревянного велосипеда. Я даже некоторое время

[4] Напомню — этот текст писался в 1981 году.

колебался, не выбросить ли всё это из книги. Потом решил оставить. Очень жалко было бы терять и целый пласт задач, и ту атмосферу энтузиазма, которую породил наш «проект» сначала среди нас — взрослых, а потом этот энтузиазм естественным образом передался детям. К тому же о Logo мы тогда ничего не знали, компьютеров не имели и даже об этом не мечтали; ну, и, наконец, изобретение деревянных велосипедов — это, если вдуматься, не такое уж дурацкое занятие. Надо бы как-нибудь вернуться к этому вопросу.

Перейду к описанию самого языка. Язык допускает расширения; сначала я опишу его основной костяк, а потом возможные расширения.

1. **Движущийся объект.** Из Диминого деревянного конструктора я склеил стрелку, показанную на рис. 4.16. Она называется роботом. Клетки, в которых помещается такой робот, имеют размер 8 см × 8 см.

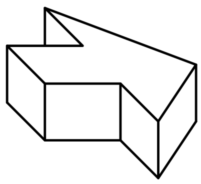


Рис. 4.16. Эта деревянная стрелка зовется роботом. Робот будет двигаться по «клетчатой» комнате.

2. **Комната.** На большом листе «бумаги для эскизов» поместилась комната 5 × 7 клеток; естественно, комнату от задания к заданию можно менять.

3. **Исполняемые операторы.** Их пока четыре: «сделать шаг вперед», «повернуться направо», «повернуться налево», «повернуться кругом». Все повороты делаются внутри одной клетки. Изображаются они так, как показано на рис. 4.17.

4. **Логические условия.** Их тоже четыре: «стена спереди», «стена справа», «стена слева», «стена сзади». Они показаны на рис. 4.18. (Почти во всех программах использовалось одно лишь первое условие.)

5. **Стрелки.** Требуются стрелки всех длин, кратных 1,5 см. На некотором количестве трехсантиметровых стрелок пишутся слова ДА и НЕТ. Следует обратить внимание на то, что каждое их этих слов должно быть написано на стрелках в четырех видах: от головы к хвосту, от хвоста к голове и вверх и вниз по вертикали (рис. 4.19, где показаны только три стрелки из восьми необходимых).

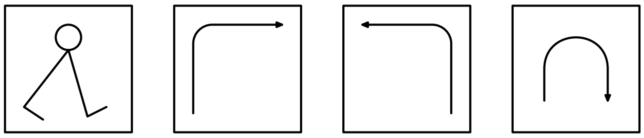


Рис. 4.17. Эти «исполняемые операторы» вырезаются из белого картона. Сторона каждого квадрата — 3 см.

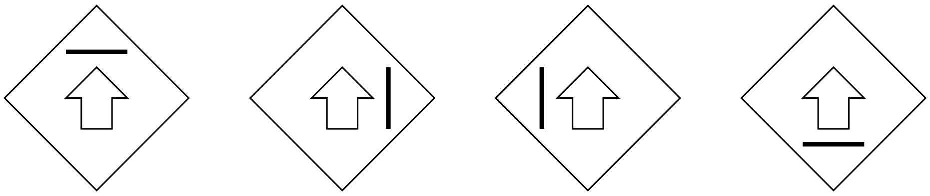


Рис. 4.18. Ромбики проверки условий. Длина диагонали — 6 см.

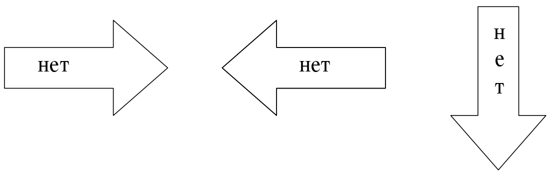


Рис. 4.19. Образцы стрелок, выходящих из «ромбиков» логических условий.

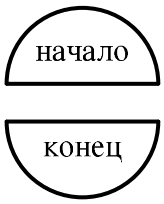


Рис. 4.20. Вся программа располагается между этими полукругами.

6. Начало и конец. Каждая программа начинается полукругом, диаметр которого обращен вниз, и кончается полукругом, диаметр которого обращен вверх. Пока использовались лишь полукруги со словами НАЧАЛО и КОНЕЦ (рис. 4.20). В дальнейшем, когда появится входная и выходная информация, они будут помещаться именно в эти полукруги.

7. Подпрограммы. Пока подпрограммы никак не использовались. В дальнейшем предполагается использовать их следующим образом:

(А) Заводится тетрадь, в которую (на отдельных страницах) заносятся все готовые программы. Каждая программа получает свой *порядковый номер*. Здесь же пишется словесная формулировка задачи — по возможности кратко, печатными буквами (чтобы дети, умеющие читать, могли сами ее прочитать).

(Б) При необходимости использовать в качестве подпрограммы некоторую программу из тех, что записаны в тетради, в блок-схему вставляется большой квадрат 6 см × 6 см с двумя полукругами; внутри большого квадрата просто ставится *номер* программы из тетради (рис. 4.21). При необходимости иметь входные и выходные данные, они записываются в полукругах.

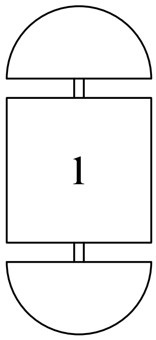


Рис. 4.21. Так будет выглядеть «подпрограмма № 1». Что конкретно она делает, записано в специальной тетради.

Форма элемента, задающего такую вот процедуру-подпрограмму, должна подчеркнуть, что это целая программа, имеющая начало и конец (полукруги) и выполняющая не просто одно действие, а *много* действий (*большой* квадрат). Вообще следует обратить внимание на относительные размеры элементов блок-схем. Правильные пропорции между ними необходимо соблюдать для того, чтобы выкладываемые на столе блок-схемы не оказывались «кособокими».

8. Счетчики. В будущем предполагается расширить язык за счет введения счетчиков. Стёпа предложил организовать счетчик в виде сосуда, в который кладутся шарики. Вопрос об обозначении счетчика на блок-схеме пока не решен. От операторов типа «$i = 1$» я твердо решил отказаться. Сначала у меня была идея обозначить счетчик треугольником с буквой; в блок-схеме приход к треугольнику с буквой А означает: «Положить один шарик в баночку с надписью "А"». Стёпа сказал, что лучше сделать не треугольник, а фигурку, напоминающую по форме тот сосуд, куда кладут шарики. Мысль хорошая, но все баночки и скляночки, оказавшиеся в доступности, имеют цилиндрическую форму, что приводит опять к прямоугольнику. Сейчас я склоняюсь к третьему варианту: на обыкновенном квадрате 3 см $\times$ 3 см нарисовать баночку с надписью "А", шарик и стрелку, показывающую, куда этот шарик класть. Если потребуются операции вычитания из счетчика единицы (извлечение шарика из баночки), то ее легко изобразить точно так же (раньше я думал переворачивать треугольник вверх ногами). Оба варианта, и старый и новый, показаны на рис. 4.22.

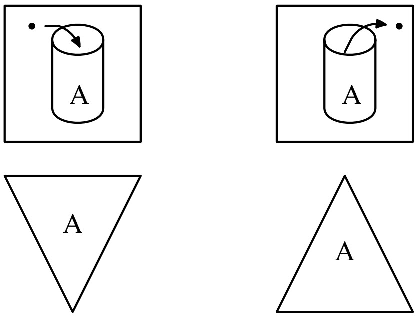


Рис. 4.22. Возможные формы счетчиков.

Введение счетчиков также требует введения новых логических условий: "А $=$ 4", "А $>$ Б" и т. д. Только предварительно надо познакомить ребят со значками $=$, $>$, $<$ и проч. Никакой другой арифметики (даже сложения) в языке не предполагается.

* * *

Теперь можно, наконец, вернутся к рассказу о занятии, который я прервал на полуслове.

Сначала, когда я поставил на стол коробку со всеми карточками и стрелочками, дети совершенно затопили меня вопросами, так что я едва успевал вставить слово. Всё же постепенно мне удалось объяснить им следующее.

Сначала я объяснил им, что робот — это механический человек; он может делать разные действия, но, в отличие от человека, у него нет своего ума; поэтому он делает только то, что ему велят, и ничего больше; зато он идеально послушный.

Потом я показал им те действия, которые может делать робот. Выяснилось, что они плохо отличают повороты направо и налево от поворота кругом. Пришлось построиться в шеренгу и поупражняться в военных командах; тогда оказалось, что они правую и левую стороны тоже путают. Однако при выполнении тех же команд с роботом ошибок было меньше, т. к. направление поворота показывали стрелки.

После этого я объяснил им, что у робота нет глаз (так как механические глаза сделать вообще-то можно, но очень трудно), поэтому он может только протянуть руку и пощупать, нет ли стены рядом с ним. Мы взяли ромбики с условиями и стали для разных положений робота проверять, верно или нет изображенное в ромбике условие. Дима очень к месту подсказал, что условие «Стена справа» выполняется и тогда, когда стена с другой стороны, но и робот (стрелка) повернут в противоположную сторону по сравнению с ромбиком (рис. 4.23). Забавно: это означает, что инвариантную (относительно поворотов) структуру понятий «левое» и «правое» он уже усвоил, но пока не может запомнить, что с какой стороны.

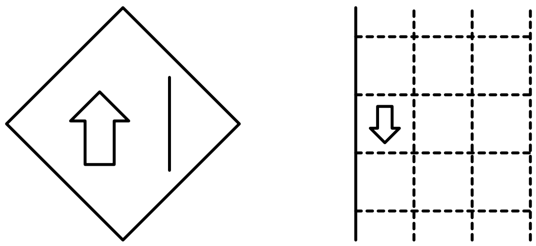


Рис. 4.23. Стена находится справа от робота.

Наконец, я сформулировал задание для робота: дойти до стены и остановиться. Тут же наступила неразбериха: один схватил робота и стал им шагать по «комнате»; другой стал раскладывать карточки по клеткам комнаты; никто ничего не понимал; еще кто-то приставал ко мне, зачем всё-таки нужна такая длинная стрелка.

С большим трудом мне удалось восстановить порядок, объяснить, что блок-схему надо выкладывать не на клетках комнаты, а отдельно на столе, что последовательность действий надо изображать стрелками и что начинать надо с «начала» и заканчивать «концом».

Тогда они мне выложили схему, показанную на рис. 4.24, имея в виду неформально следующие действия: «начать и идти до конца». Я показал им, что при такой программе робот иногда доходит до стены, иногда не доходит, а иногда вообще расшибает нос.

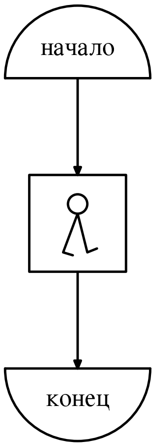


Рис. 4.24. Программа «дойти до стены и остановиться» — *первая попытка* (неправильная). При такой программе робот делает всего один шаг, причем даже не проверяет на всякий случай, нет ли перед ним стены.

Тогда Дима закричал: «А, я знаю, нужно столько вот этих штучек (показал на карточку с шагом), сколько нужно шагов; сейчас скажу: раз, два, три... — пять штук!»

Тут я допустил серьезный педагогический промах, причем, к сожалению, ровно тот же, что меня преследует всё время. Надо было спокойно и без спешки развить эту идею: вырезать из обычной бумаги квадратики, нарисовать человечков и построить все предлагавшиеся схемы. Тогда появление цикла стало бы настоящим открытием. Но я, во-первых, по инерции, во-вторых, с перепугу, что у меня не заготовлено достаточное количество операторов «сделать шаг», попросту отмахнулся от этой идеи на том основании, что программа получается разной для разных клеток, а также очень большой для больших комнат.

После этого мы исследовали возможность обойтись всё же одним оператором шага, возвращаясь к нему с помощью стрелок. Оказалось, что тогда робот каждый раз наталкивается на стену и расшибает нос.

Тогда мы поступили следующим образом: я стал по очереди завязывать мальчикам глаза и просил выполнить в точности то, что требовалось роботу, т. е. дойти до стены и остановиться. Но только перед этим я каждого из них носил с завязанными глазами по комнате и вертел во все стороны, чтобы он не знал, далеко ли до стены. При этом я просил их обратить внимание на то, что каждый из них, прежде чем начать идти, протягивал руку вперед, чтобы проверить, нет ли там стены.

После этого мы пришли к выводу, что первым действием должна быть проверка того, нет ли впереди стены, — и программа была составлена.

В заключение каждый из них прошагал роботом по комнате, строго следуя блок-схеме (если кто-либо начинал баловаться, я особо подчеркивал, что роботы, в отличие от людей, *абсолютно послушны*).

Занятие 40. Появляются блоки Дьенеша

12 декабря 1981 (суббота) $11^{10} - 11^{55}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Домокош Саас[5] привез мне из Венгрии в подарок набор разноцветных пластмассовых плашечек, отличающихся друг от друга четырьмя признаками: *цветом* (красный, синий, желтый, зеленый), *формой* (круги, квадраты, треугольники), *размером* (большие и маленькие) и наличием или отсутствием *дырки* — итого $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ штук. Вроде бы именно эти плашечки называются «логическими блоками Дьенеша»[6]. С ними связано первое задание.

Сначала мы обсудили все имеющиеся признаки. Потом я сформулировал задачу:

> Выкладывать цепочку плашечек друг за другом так, чтобы каждая следующая отличалась от предыдущей только одним признаком, а три были общими.

Ребята очень легко справлялись с заданием, а если иногда ошибались, то либо ошибку обнаруживал сам ошибившийся, либо кто-нибудь из остальных. Вскоре выросла цепочка длиной почти во весь стол.

Задание 2. В этот момент мне пришла в голову мысль сделать задание, аналогичное задаче В. А. Левина «чем свяжешь?». Я положил на стол две

[5] Венгерский математик, специалист по теории вероятностей. В аспирантуре учился в Москве. Век буду ему благодарен за его подарок.

[6] Золтан П. Дьенеш — один из лидеров «активного», т. е. основанного на конкретной деятельности, математического образования. Сейчас блоки Дьенеша можно заказать по Интернету.

фишки, отличающиеся всеми четырьмя признаками, и сказал, что это начало и конец цепочки, и их нужно связать цепочкой по тому же правилу.

К моему удивлению, и с этой задачей дети справились легко и быстро, совершенно четко с каждым шагом уменьшая «расстояние Хемминга» на единицу.

После этого Женя предложил убрать предыдущую длинную цепочку, а ее концы соединить короткой цепочкой, как в последней задаче. Сделали. Тогда Дима предложил еще соединить между собой концы двух получившихся цепочек (чтобы получился четырехугольник). Сделали и это. «Получился квадрат», — сказали дети. Я объяснил, что это не квадрат, а просто четырехугольник, так как его стороны содержат разное число фигурок (концы двух исходных цепочек отличались не всеми четырьмя признаками). Потом показал, как их можно расположить по кругу. Это им почему-то очень понравилось. Дима еще захотел провести в этом круге диаметр.

Я, однако, его остановил. Возник спор, чем заниматься дальше. Я уговаривал детей, что если мы сейчас переиграем во все игры с этими фигурками, то ничего не останется на следующие разы. Они, тем не менее, хотели еще. Я уж, было, совсем согласился, но тут Петя спросил: «А что — дальше будет про *робот*?» Я сказал, что про робот. Мнения опять разделились: некоторые из тех, кто хотели продолжать заниматься фигурками, теперь захотели играть с роботом; некоторые из тех, кто были согласны закончить, теперь захотели всё же играть с фигурками, так как робот им не нравился. Женя сказал, что ему робот нравится меньше, потому что это трудно (дальнейшее показало, что он прекрасно со всем справляется, так что он, видимо, просто повторял слова Наташи). Я сказал, что втроем им очень трудно договориться, так как все хотят разного, поэтому нужно, чтобы один был главным, и как он решит, так и будет. Главным решили избрать меня, и мы перешли к программированию.

3. Я сформулировал задачу: дойти до стены и повернуться к ней спиной.

Результаты были ошеломляющими.

Дима сказал: «Папа! А ты нам сделай, как было в прошлый раз». Ответить я не успел: Женя и Петя уже хватали какие-то детали, и Дима, испугавшись, что ему ничего не останется, тоже стал хватать.

В мгновение ока они в шесть рук соорудили блок-схему (не для старой задачи, как предлагал Дима, а уже для новой) — сначала с двумя ошибками, но тут же сами их исправили: (1) они забыли две стрелки возврата после «шага» к проверке условия «впереди — стена?», но Женя вспомнил и поставил; (2) Дима хотел к ромбику прицепить третью стрелку, ведущую к «повороту кругом» — как на рис. 4.25; я стал спрашивать, почему повисла без дела стрелка «да», и в каком случае следует идти по третьей стрелке, но еще до того, как я сумел четко сформулировать эти вопросы, Петя сказал: «Это вот сюда надо», — и показал для оператора поворота правильное место.

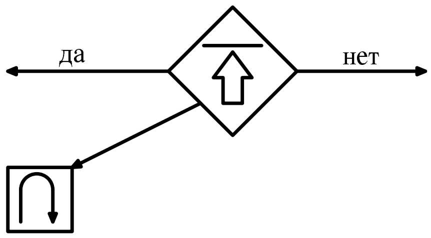


Рис. 4.25. Попытка незаконного использования ромбика с условием: не ясно, в каком случае следует идти по третьей стрелке — если «ни да, ни нет», что ли?

После этого каждый из них выполнил программу, водя пальцем по блок-схеме и шагая роботом по комнате.

Забыл сказать: в начале задания они требовали, чтобы мы снова обязательно ходили с завязанными глазами. Я сказал, что если потребуется — сделаем, а если не потребуется, зачем же? Дети немножко поныли: «Ну-у, а мы хотим...» Но потом в процессе работы никто об этом не вспомнил.

Занятие 41. То же: блоки Дьенеша и робот

19 декабря 1981 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Венгерская игра. Я напомнил ребятам предыдущее задание, когда каждая следующая фигурка отличалась от предыдущей всего одним признаком, и предложил строить такую же цепочку, но только следующий элемент должен отличаться от предыдущего всеми четырьмя признаками.

Ребята справлялись с заданием успешно и легко, хотя иногда, конечно, ошибались. Посреди работы Петя заметил, что большие фигурки чередуются с маленькими. Мы обсудили причину (признак «размер» имеет всего два значения — «большой» и «маленький»), обнаружили, что то же самое происходит с дыркой (фигурки с дырками и без дырок чередуются), и потому все большие фигурки в нашей цепочке без дырок, а все маленькие — с дырками. Тогда по моему предложению мы убрали все лишние фигурки (большие с дырками и маленькие без дырок), чтобы легче было разыскивать нужные. После этого работа была быстро закончена.

Затем по предложению Димы мы построили под первой цепочкой вторую, точно такую же, только все фигуры с дырками были заменены на бездырочные, и наоборот. Дима заметил, что по горизонтали у нас получилось «новое задание», а по вертикали — «старое задание» (т. е. отличие ровно по одному признаку).

Картинка получилась такая красивая, что никак не удавалось уговорить детей убрать ее со стола. Особенно упрямился Дима; с ним удалось договориться только после того, как было решено вырезать такие флажки к Новому году и повесить их на елку.

2. Задача для робота: подойти к той стене, которая сзади, и стать к ней спиной (рис. 4.26).

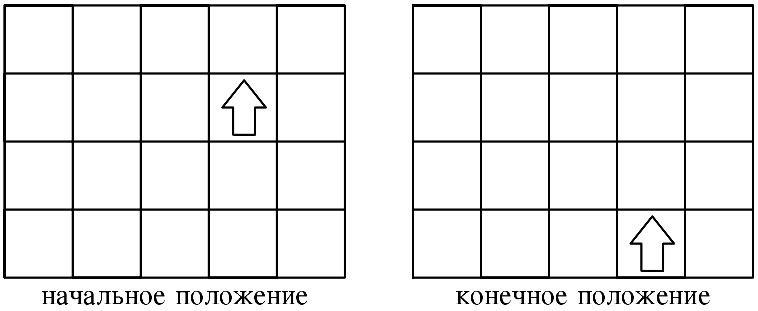


Рис. 4.26. Робот должен перейти из начального положения в конечное.

Сначала я попросил ребят выполнить это задание «вручную», т. е. взять робота в руку и проделать с ним все нужные действия (шаги, повороты и проч.), сам же показал им только начальное и конечное положения. К моему удивлению, правильно всё сделал только Женя (повернулся кругом, сделал два шага, повернулся кругом). Петя же с Димой делали бог весть что: ходили куда-то в сторону и зигзагом, делали много лишних поворотов, делали шаги назад и т. п. — и в итоге оказывались не там, где нужно. То ли они пытались придумать другое задание (Дима это очень любит), то ли мое задание не могли понять — я так и не разобрался. От меня потребовалось известное терпение, чтобы каждый раз объяснять им их ошибки. Наконец, я снова предоставил слово Жене, чтобы он показал всё правильно, но тут и у него произошел сбой и он сделал всё не так, и вообще они, оказывается, уже забыли, в чем задача; всё началось сначала.

◁ Проблема на самом деле была в том, что мне хотелось написать не как можно более простую программу, а как можно более захватывающую: чтобы она делала то, что от нее требуется, но по дороге робот бегал бы по всему полю, как сумасшедший. Приходилось, однако, мириться с простыми программами: у нас и такую-то написать получалось с большим трудом. Только через несколько месяцев нам удалось написать действительно «удачную» программу: она правильно заводила робота в угол, но при этом даже папа не мог понять, как это получается. — Дима. ▷

Наконец, ясность была наведена и мы приступили к программированию. Было испробовано множество вариантов, перечислить их здесь нет возможности. Каждый раз готовую программу мы использовали в деле, т. е. «тестировали», проверяя, что она предписывает делать роботу. Каждый раз, когда программа зацикливалась, это вызывало безумный хохот и общий восторг. Потом, наконец, была составлена работоспособная программа, которая приводила к нужному результату, но не из любой начальной позиции, так как в цикле она сначала делала шаг, а потом проверяла наличие стены (таким образом, если робот в начальной позиции уже стоял у стены, то, повернувшись и попытавшись сделать первый шаг, он расшибал себе нос). Я напомнил детям пословицу «семь раз отмерь, один раз отрежь», объяснил, что нельзя шагать наобум, что перед каждым шагом надо проверять, нет ли перед тобой стены. Однако это не привело к немедленному исправлению ошибки; вместо этого последовала целая серия бессмысленных вариантов, но в результате всё же образовалась правильная программа. В заключение, по образовавшейся традиции, каждый из ребят выполнил всю программу с избранной им самим начальной позиции. На этом занятие окончилось.

Занятие 42. Снежинки

2 января 1982 (суббота) $11^{10} - 11^{55}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Новогоднее занятие. Как ни странно, я не планировал как-то связать это занятие с Новым годом (просто не сообразил). Новогодним оно получилось само собой, хотя я и осознал это только после того, как занятие окончилось. Если бы я это понял раньше, можно было бы сделать кое-что гораздо лучше.

Задание 1. Магические квадраты. Петя принес первую в его жизни газету — первый номер «Пионерской правды», в котором была головоломка: в клетках таблицы 4×4 стояли трехзначные числа; надо было их переставить так, чтобы получить магический квадрат с суммой 1982.

Я сказал ребятам, что это задача очень трудная, но зато рассказал им, что такое магический квадрат, потом достал альбом Дюрера, нашел «Меланхолию», сказал, что Дюрер был и художником, и математиком, показал магический квадрат. Потом мы стали проверять его «магичность», для чего сосчитали несколько сумм по строкам и столбцам и по одной диагонали.

Две цифры на картинке были написаны как-то непонятно (я раньше этого не замечал). Я предложил ребятам определить, что это за числа. Никто из них не догадался, что можно из известной суммы в строке (34) вычесть сумму трех известных чисел — и так получить четвертое. Вместо этого они действовали методом проб, однако обычно угадывали требуемое число с одной-двух попыток.

Задание 2. Центральная симметрия.

Я сказал ребятам, что мы с ними уже рассматривали симметрию относительно прямой линии (зеркальца), а еще бывает другой вид симметрии, при котором у симметричной фигуры есть центр. На клетчатой бумаге я нарисовал центр, а потом ставил в разных местах точки, черточки, кружочки — и иногда рисовал симметричную фигуру сам, а иногда давал ребятам. Дима — это начинает входить у него в обычай — вместо того, чтобы выполнить мое задание, сказал, что он сам придумал другое задание[7], и стал рисовать какую-то кривулю, а потом ей центрально-симметричную, но из-за сложной формы кривой и из-за нетвердой руки невозможно было определить, правильно он выполняет задание или нет. С трудом я его уговорил, что его задача очень трудная и нужно сначала научиться решать более легкие задачи.

Потом я предложил ему преобразовать треугольник, и он нарисовал образ не центрально-симметричным, а осе-симметричным, т. е. не перевернул его вверх ногами. Я показал, как надо его рисовать правильно (рис. 4.27), и мы обсудили, почему.

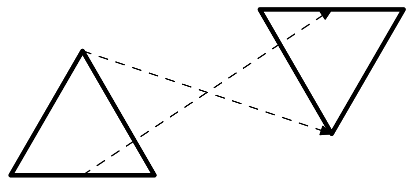


Рис. 4.27. Пример центральной симметрии.

[7]◁ Действительно, я и диссертацию защитил скорее по своей собственной задаче, чем по задаче моего руководителя... — Дима. ▷

После этого я показал ребятам картинки из книги Германа Вейля «Симметрия» и из сборника «Узоры симметрии». Мы отыскивали осе-симметричные и центрально-симметричные фигуры; я сказал, что чем больше у фигуры симметрий, тем она красивее.

Среди картинок мы нашли рисунки снежинок. Дима очень удивился: «Что это, снежинки?» Я сказал: «Да, только сильно увеличенные». Мальчики договорились пойти на улицу с лупой и рассматривать снежинки (к сожалению, ничего путного из этого не вышло, так как снег был слежавшийся).

◁ Потом мы с Петей часто ловили падающие и еще не испорченные снежинки и их рассматривали. — Дима. ▷

Наконец, мы стали строить на круглой мозаике центрально-симметричную фигуру (с учетом цвета фишек). Вот тут бы мне догадаться и построить снежинку! Но вместо этого наша фигура имела только центр симметрии и никаких осей. Ребята справлялись с заданием очень хорошо, ошибок практически не допускали. Боря[8] участвовал вместе с нами.

После занятия, когда мальчики уже одевались на улицу, я рассказал им о Кеплере и о том, что он в качестве новогоднего подарка другу написал математическую работу «О снежинке, или Новогодний дар». Только тогда мне пришла в голову идея о возможности «новогоднего» занятия. На нём можно было бы еще вырезать снежинку из бумаги.

Занятие 43. О некоторых свойствах сложения

9 января 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{00}$ (40 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

На этот раз я сказал, что вчера на английском у них было новогоднее занятие; после этого каждый получил в подарок пластмассовую снежинку. Я взял Димину снежинку и всем ее показал; сказал, что наше сегодняшнее занятие тоже будет новогодним.

Задание 1. Симметрии снежинок.

Я сказал ребятам, что снежинка очень красивая, потому что у нее много симметрий, и попросил их показать, какие они видят симметрии. Они нашли не только очевидные оси, идущие *вдоль* лучей, но и менее очевидные, идущие *между* лучами (оси AA и BB на рис. 4.28).

Потом я спросил, есть ли у снежинок центр симметрии. Ребята сказали, что есть. После этого я показал висящую на стене вырезанную Аллой к

[8] Женин папа.

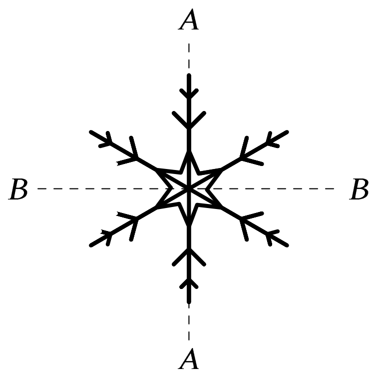


Рис. 4.28. Симметрии снежинки.

Новому году снежинку из бумаги и сказал, что она тоже очень симметричная и очень красивая, только в одном отношении не похожа на настоящую снежинку: у настоящей снежинки всегда бывает 6 лучиков, а у этой — 8. Затем я объяснил, почему снежинку из 8 лучиков легче вырезать из бумаги, чем из 6: три раза сложишь — получится восьмушка. Некоторое время мы поспорили, как надо складывать бумагу, чтобы получилось 6 лучиков. Потом я показал, как это сделать. У Димы затряслись руки — так ему захотелось что-нибудь тут же вырезать. Но я сначала сам решил обрезать край, чтобы из квадрата сделать круг в качестве заготовки; Дима, однако, не дождался, пока я это сделаю, и начал складывать другой лист бумаги, я же, воспользовавшись этим, дорезал снежинку сам. К сожалению, полученная фигура имела всего 3 оси симметрии вместо 6, и поэтому не была центрально-симметричной (рис. 4.29); я не продумал этот вопрос заранее, так как вся ситуация с листом бумаги и с вырезанием произошла экспромтом. Я скомкал эту тему (комкать снежинку не стал) и поспешил скорее перейти к мозаике.

Задание 2. Построение снежинки на круглой мозаике.

Речь идет не о той прямоугольной мозаике, которой мы многократно пользовались на предыдущих занятиях, а о другой, круглой мозаике с шестиугольными фишками. Задание ясно из заглавия: я ставил на мозаику одну фишку, а очередной из мальчиков должен был поставить все соответствующие ей фишки, чтобы получилась снежинка (т. е. если исходная фишка была на луче, то надо было достроить еще 5, а если не на луче, то еще 11, рис. 4.30). Цвет, естественно, тоже учитывался. Дима и Петя делали все правильно, а Женя почему-то всё время допускал одну и ту же ошибку. В

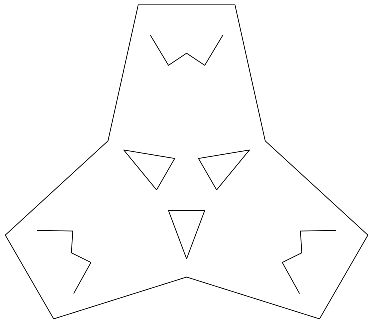


Рис. 4.29. Неудавшаяся снежинка: всего три оси симметрии, а центра симметрии вообще нет. Эту снежинку можно поворачивать на 120°, но повороты мы еще «не проходили».

итоге их деятельности получилась довольно красивая разноцветная снежинка.

Следует обратить внимание на нечеткую постановку задачи: «чтобы получилась снежинка». Для меня это до некоторой степени — вопрос принципа. Четкая и точная постановка потребовала бы разговоров о поворотах, о сразу многих осях симметрии и чуть ли не о группе автоморфизмов, и дети всё равно бы ничего не поняли и не запомнили. Разумный режим работы — это когда понимание условия и необходимые уточнения к нему приходят в процессе решения. Не так ли работает математик-исследователь? Окончательная формулировка задачи становится ясной лишь тогда, когда задача наконец решена.

Рис. 4.30. Если точка лежит на луче снежинки, ей соответствуют еще 5 «таких же» точек; то же самое верно и для точек, лежащих на биссектрисах лучей. В остальных случаях одной точке соответствуют еще 11 «таких же».

Задание 3. Ассоциативность (и коммутативность) сложения.

Я сказал ребятам, что когда они пойдут в школу, они там будут учиться считать, но и сейчас уже... Они меня перебили и стали кричать каждый свое: «А я уже умею, но только до ста» (Петя); «А я только по часам» (Женя); «А я умею считать до очень больших чисел, только я не пробовал» (Дима). По контексту я понял, что они под словом «считать» понимают последовательное перечисление чисел: раз, два, три... Я сказал, что они еще немножко умеют складывать и умножать. Выяснилось, что Петя и Женя не знают, что значит «умножать». Я объяснил, что это значит складывать много раз одинаковые числа, и привел пример.

Но самое интересное, продолжал я, не просто складывать и умножать, а знать некоторые удивительные секреты про сложение и умножение. И вот один из таких секретов я вам сейчас покажу.

После этого мы рассмотрели два примера: $5+6+7$ и $6+8+2$. В каждом из них мы делали сложение тремя различными способами: сначала выбирали два числа и складывали их, затем к сумме прибавляли третье число.

[Надо было начать с коммутативности.]

Каждый раз получалось одно и то же. Я спросил у ребят, почему так получается, и всегда ли будет одно и то же. Без всякого удивления они ответили, что это потому, что мы складываем одни и те же числа, и что так будет всегда. Я назвал три очень больших числа, одно из них с миллионами, и спросил, уверены ли они, что для таких больших чисел тоже всё будет правильно. Мальчики согласились, что для таких чисел это может оказаться и неправильным.

Тогда как же всё-таки объяснить совпадение результатов у нас? Петя снова повторил тот же аргумент: мы складываем одни и те же числа и, значит, делаем одно и то же. — Как одно и тоже? — возмутился я. — Смотри, здесь мы сначала получаем 11 и к нему прибавляем 7, а здесь сначала получаем 13, а к нему прибавляем 5! — Ну и что? — ответил Петя. А мне так хотелось, чтобы они удивились!

Тогда я зашел с другого конца. А что, — спросил я, — если мы делаем одни и те же действия в разном порядке, всегда получится одно и то же? — Да, — сказал Петя. — Ну смотри, Петя, — сказал я. — Допустим, что тебе нужно надеть носки, валенки и галоши. Если ты сначала наденешь носки, потом валенки, а потом галоши, то всё будет хорошо. (Кивок). Ну а если ты наденешь сначала галоши, потом валенки, а потом носки? — Раздался громкий хохот, и мальчики стали наперебой сочинять, что еще можно неправильно надеть. Вот видите, — сказал я, — иногда нужно делать не только правильные действия, но еще и в правильном порядке.

[Следует признать, что пример не совсем честный, так как демонстрирует нарушение коммутативности, а не ассоциативности. Однако коммутативностью сложения мы тоже пользовались, когда складывали два крайних члена суммы, а потом добавляли средний.]

Почему же всё-таки у нас всё правильно? Петя ответил, что ему всё равно всё понятно, только он не знает, как объяснить.

— Ну ладно, — сказал я, — если вы так уверены, что можно складывать числа в любом порядке, то решите вот такую задачу: нужно сложить все вот эти числа — и я разложил на столе карточки с числами от 1 до 9, которые вообще-то предназначались для того, чтобы складывать из них магический квадрат 3×3. Я сказал, что это задача очень трудная, но если они проявят хитрость и придумают, какие числа с какими удобно складывать, то она станет легкой.

Однако ребята всё же стали складывать числа подряд. Считал практически один Дима; Женя иногда подключался, понукаемый Наташей, Петя же только в самом начале закричал: «Получится сто!», — и этим его участие в процессе счета и ограничилось.

Досчитали; получилось 45. Я сказал, что они молодцы и очень хорошо считают, но что хитрости у них всё же маловато, и другим способом можно было бы сосчитать гораздо проще. Дима предложил считать с другого конца (с девятки). — Ну попробуй, будет ли проще, — сказал я. — Девять и восемь легко сложить? — Нет, — ответил Дима, но тут его перебил Женя и сказал, что если считать с другого конца, то будет больше. «Сто! Получится сто!» — обрадованно закричал Петя. (Куда только девалась его уверенность в том, что результат всегда будет одинаковым?) Тогда мы стали всё-таки считать с правого конца; работал опять один Дима, и получилось снова 45.

Поскольку ребята никак не догадывались до разумного способа, я задал наводящий вопрос: «А вот единицу с кем очень легко сложить?» (Прошу прощения у ригористов, я очень люблю делать числа одушевленными.) На это Дима резонно ответил, что ее с любым числом легко сложить. Тогда я нашелся: «А девятку?» Оказалось, что девятку легче всего сложить с единицей — и получить очень хорошее число 10, его можно отложить отдельно и запомнить. Тут ребята сами догадались, что так же можно отделить $2+8$, $3+7$ и $4+6$. Получилось четыре десятки и отдельно 5. «Ну и сколько же получилось в сумме?» — спросил я. «Сто!» — закричал Петя.

К моему удивлению, не одному лишь Пете, но и Диме с Женей тоже было не очевидно, что четыре десятки плюс пять дают 45. Так что пришлось еще кое-что объяснять и наводящие вопросы задавать. То ли они уже устали, то ли задача для них слишком трудна — не знаю. Интересно, как обстояло дело тогда, когда люди еще не придумали позиционную систему счисления. Им тогда не приходилось оперировать с *цифрами*, представляющими собой отдельно десятки и отдельно единицы. Возможно, формальный характер этих операций не заслонял от них сути дела? Но это всё фантазии.

В заключение я пообещал, что в следующий раз мы попытаемся сложить из этих чисел магический квадрат, но сам теперь сомневаюсь, доступна ли для них эта задача. Несколько проб, которые ребята сделали тут же, на месте (без моего участия) скорее убеждают в том, что недоступна.

Вечером Дима подошел ко мне и спросил, как всё-таки — всегда ли будет одинаковое число, если складывать по-разному. Я сказал, что всегда. А знаю ли я сам объяснение? Знаю. Почему же я им не сказал? Потому что хотел, чтобы они сами думали. А когда они сами догадаются, я им скажу? Я ответил, что скажу.

Занятие 44. Магический квадрат

16 января 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{20}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Описать это занятие очень трудно. Первым заданием было складывание магического квадрата — и хорошо еще, что я сделал его первым, так как оно растянулось на целый час и оказалось очень трудным. Всё занятие состояло из проб различных вариантов, а также из поиска (с моими подсказками и наводящими соображениями) руководящих принципов перебора. В общих чертах события развивались так.

1) Сначала мы решили выбрать то число, которое должно служить суммой элементов каждой строки и каждого столбца. По предложению ребят было выбрано число 5. Долгое время они пытались получить сумму 5; наконец, пришли к выводу, что это невозможно, однако я потребовал объяснений. С грехом пополам совместными усилиями мы такое объяснение нашли: даже три самых маленьких числа 1, 2 и 3 уже дают сумму большую, чем 5.

2) После этого были перепробованы суммы $6, 8, 10, 12, 13$ — однако каждый раз безуспешно: либо вторую, либо третью строчку сложить не удавалось.

3) Тогда я предложил подумать и понять, какую следует выбрать сумму. Я напомнил им, что в прошлый раз мы подсчитали сумму всех чисел (ребята сами вспомнили, что она равна 45). После этого мы долго методом подбора делили 45 на 3.

4) Найдя нужную сумму, стали складывать строки так, чтобы в них получалась сумма 15. Здесь тоже не обошлось без проб и ошибок, но в итоге

дело было сделано. Особенно ребята обрадовались, увидев, что в последней строчке само собой получилось 15.

5) Далее мы стали, перекладывая цифры только внутри строчек, добиваясь суммы 15 в столбцах. Это тоже удалось.

6) Наконец, мы перешли к диагоналям. В одной из диагоналей сумма сама собой оказалась 15, а в другой — 6. Мы стали переставлять сразу целые строки или целые столбцы, пытаясь получить 15 на обеих диагоналях, но из этого ничего не вышло. Так нам и пришлось удовлетвориться неполноценным решением:

5	9	1
7	2	6
3	4	8

Здесь сказался мой недосмотр: если бы я обдумал задачу заранее, то понял бы, что в центральной клетке может стоять только 5 и ничто иное — и тогда одной перестановкой строк и одной перестановкой столбцов мы бы получили решение:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

На следующий день я рассказал Диме, почему в центре должно стоять 5 (рис. 4.31), и мы с ним сложили настоящий квадрат, но остальным я этого пока не рассказывал.

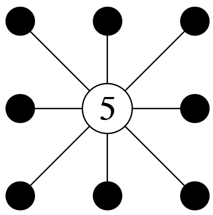


Рис. 4.31. Если догадаться, что в центр квадрата следует поставить 5, то вся задача сильно упрощается: ведь тогда суммы чисел, стоящих в противоположных клетках, должны быть равны 10.

Забыл написать в самом начале, что я показал ребятам перфокарты[9] и некоторое время объяснял, что́ это значит и зачем, и отвечал на вопросы.

Размышляя над этой задачей после занятия, я придумал хорошую задачу для взрослых: построить *мультипликативный* магический квадрат, т. е. квадрат, в котором стоят различные натуральные числа, и *произведения* чисел каждой строки, каждого столбца и обеих диагоналей одинаковы. Вместо того, чтобы требовать, как для аддитивных квадратов, чтобы числа в таблице составляли начальный отрезок натурального ряда $1, 2, 3, \ldots, n^2$ (для мультипликативных квадратов это невозможно), можно потребовать, чтобы произведение было минимальным. «Минимальные» мультипликативные магические квадраты размера 4×4 и 3×3 показаны в табл. 4.3.

1	42	105	10
30	35	14	3
70	15	6	7
21	2	5	210

3	4	18
36	6	1
2	9	12

Таблица 4.3. Мультипликативные магические квадраты. Если перемножить числа каждой строки, каждого столбца, а также двух диагоналей, то каждый раз получится одно и то же число: 44100 для большого квадрата и 216 для маленького.

Еще одно решение для квадрата 3×3 (аддитивного): уменьшаем каждое число на 5; тогда вместо чисел $1, 2, 3 \ldots, 9$ имеем числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, а во всех строках, столбцах и диагоналях должна получиться сумма 0. Ставя в центр 0, симметричные относительно центра клетки заполняем противоположными числами. В итоге имеем, например, вот что:

[9]Прогресс компьютерных технологий идет так быстро, что порой ощущаешь себя настоящим ископаемым: ведь мне еще довелось в молодости работать на вычислительных машинах с *перфолентами*! На практике это означает вот что: работаешь на телеграфном аппарате, который пробивает отверстия в длинной бумажной ленте; после двух часов работы сделаешь одну единственную ошибку — и твою ленту можно выбрасывать. После этого перфокарты воспринимались как технологическое чудо: вместо того, чтобы выбрасывать всю колоду, можно было заменить только одну ошибочную карту. С перфокартами была другая проблема, которой не было с перфолентой: если уронишь колоду карт на пол, как потом собрать их в правильном порядке... Описания всех этапов этой истории хватило бы на целую статью.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & -3 \\ \hline -4 & 0 & 4 \\ \hline 3 & -2 & -1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Интересное наблюдение в процессе вычислений: Дима полагает, что если каждое из трех слагаемых увеличить на единицу, то и сумма увеличится на единицу.

Занятие 45. Обобщенные цепочки

23 января 1982 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Я показал ребятам тот магический квадрат, который сам составил в их отсутствие, а Дима сказал, что, оказывается, в середине обязательно должна быть пятерка. Петя стал водить пальцем вдоль строк и столбцов, приговаривая скороговоркой: «Пятнадцать, пятнадцать, пятнадцать», — однако никакой дальнейшей проверки или обсуждения не последовало, и я не стал к ним приставать, чтобы не впадать в занудство.

Задание 2. Одно из заданий из серии C_5^2, описанных в предыдущей главе: я его здесь не повторяю.

После окончания работы я пообещал ребятам, что как-нибудь в следующий раз дам им задачу, по виду не похожую на эту, а на самом деле в точности такую же, но они об этом не догадаются. Дима очень заволновался и спросил, скажу ли я им об этом *потом*. Я успокоил его, пообещав, что скажу.

Задание 3. «Обобщенная цепочка». На листе бумаги нарисовано несколько кругов, соединенных линиями. Требуется в каждый круг положить по фигурке из венгерского набора так, чтобы в кругах, соединенных линией, лежали фигуры, отличающиеся в точности одним признаком (а в кругах, не соединенных линией, неважно). На этот раз ребята получили две задачи (рис. 4.32).

В первой из задач фигуры, лежащие на лучах, отличаются от центральной фигуры: три — цветом, две — формой, одна — размером, одна — дырочностью (итого семь).

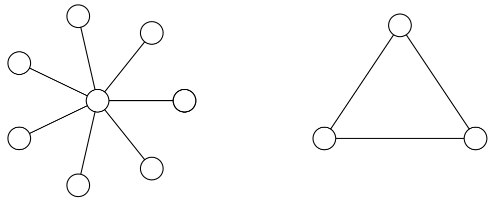


Рис. 4.32. В круги кладутся фигурки из набора Дьенеша; те из них, что соединены чертой, должны отличаться одним признаком; на остальные пары условий нет.

Вторая задача сложней. В ней есть только два типа решений: когда в вершинах треугольника лежат одинаковые фигурки трех разных цветов либо трех разных форм. Поскольку ребята положили сначала в две вершины большую и маленькую фигурки, решение долго найти не удавалось. Пришлось мне провести рассуждение, показывающее, что третья фигурка не может быть ни большой, ни маленькой. Тогда они вторую фигурку заменили, однако заменили ее такой, которая отличалась от первой только дыркой. Опять начались долгие поиски решения, и мне опять пришлось объяснить, что третья фигурка не может быть ни с дыркой, ни без дырки.

Наконец, Дима нашел верное решение, а я показал второй возможный вариант.

На этом занятие закончилось, но мальчики никак не хотели расставаться с красивыми фигурками и попросили разрешения хотя бы самим сложить их в коробку. Я разрешил. Тогда Петя закричал: «Я буду складывать квадраты!», Дима: «А я — круги!», а Женя закричал: «А я — маленькие!». Я воспользовался случаем произвести математическое назидание: «Понимаешь, Женя, если Дима будет складывать круги, а ты — маленькие, то непонятно, кому из вас складывать маленькие круги».

Потом я подошел к ним еще раз и спросил, какие фигурки складывать труднее всего, а какие — легче всего, и почему. После обсуждения я объяснил, что треугольник можно повернуть только тремя способами (чтобы он попал в лунку), квадрат — четырьмя, а круг — бесконечным числом способов. Дима сказал, что самые трудные — одноугольники.

Это занятие имело неожиданное продолжение. Я еще не успел убрать коробку с фигурками, когда с прогулки вернулась Женечка и сразу захотела «в это» играть. Я дал ей задание по ее силам (ей 2 года и 1 месяц) — высыпал все фигурки в крышку и предложил ей укладывать их обратно. Она принялась за дело с большим энтузиазмом. Этот незапланированный «урок математики для двухлетних» продолжался больше часа; рассказ о нём будет в другом месте (стр. 294—296). Я не устаю поражаться тому, как долго может работать ребенок, когда он делает это по собственной инициативе.

Занятие 46. Изоморфизм задач

30 января 1982 (суббота) $11^{00} - 11^{45}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Изоморфизм задач. Речь снова идет о серии задач, связанных с C_5^2 — с той разницей, что раньше мы решали каждую задачу саму по себе, а сейчас стали их рассматривать вместе, а также выяснять, чем эти задачи «похожи» друг на друга.

Задание 2. Продолжение задания № 45-3.

Я сказал ребятам: «Вот вы видели, что бывают задачи, которые кажутся разными, а на самом деле одинаковы. А еще бывают такие задачи, которые помогают решать другие задачи. Вот я и хочу вспомнить с вами одну из задач, которые были в прошлый раз — потому что она поможет нам решить сегодняшние задачи». С этими словами я выложил задачу-треугольник (рис. 4.33).

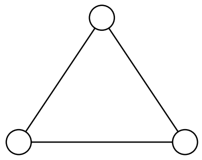


Рис. 4.33. Задача из прошлого занятия, которая сегодня послужит нам чем-то вроде леммы.

Дима тут же сделал ее решение с тремя цветами, после чего Петя и Женя, отталкивая друг друга, выложили еще два аналогичных решения. Я сам напомнил им неизоморфное решение с тремя формами. После этого я дал им собственно задачу — ромб с диагональю (рис. 4.34).

Ребята практически мгновенно нашли решение, я даже не успел им задать тот вопрос, который намеревался: «Понятно ли, чем предыдущая задача помогает решить эту?»

Тогда я выдал следующую фигуру — два концентрических треугольника (рис. 4.35). На этот раз я вопрос задать успел, но ответа не получил, так

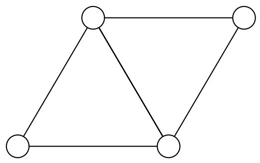


Рис. 4.34. Граф другой, но задание то же, что и раньше: фигурки в смежных вершинах должны отличаться ровно одним признаком.

как все уже были поглощены решением. Пришлось отвечать самому: «Потому что эта фигура состоит из треугольников». К этому моменту Петя уже заполнил внутренний треугольник, а когда я произнес свою фразу (ответ на свой же вопрос) и при этом показал пальцем на задачу с треугольником, где еще лежали неснятые фигурки, Дима вскрикнул: «А!» — и перетащил эти фигурки на внешний треугольник последней фигуры.

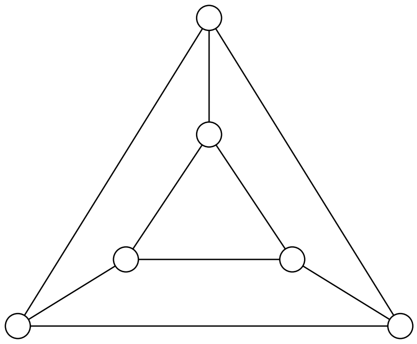


Рис. 4.35. Еще один граф.

Но решения не получилось! Каждый треугольник в отдельности удовлетворял условию, однако связи между большим и маленьким треугольниками получились неверными (отличие более чем по одному признаку). Последовало недолгое размышление и обсуждение — и задача решена. Это задание всё целиком заняло 5 минут.

Задание 3. Магический квадрат.

К этому моменту прошло 35 минут. Я сказал, что ребята — такие молодцы, что решили все мои задачи, так что у меня ничего не осталось, и поэтому урок окончен. Но они запросили еще.

Немного подумав, я сказал, что задач больше сегодня давать не буду, а вместо этого расскажу, какой я придумал простой способ строить магический квадрат — и рассказал тот способ, который описан в самом конце занятия 44 (стр. 144), когда квадрат сначала заполняется пятерками, а потом к противоположным клеткам добавляются противоположные числа. Добавки к 5 я писал на обороте карточек с цифрами. С отрицательными числами никаких проблем не возникло.

Занятие 47. Конец истории про C_5^2

6 февраля 1982 (суббота) $11^{00} - 11^{50}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Квадраты из букв.

Просто так, ради развлечения, я показал ребятам два «магических квадрата» из букв, которые одинаково читаются по горизонтали и по вертикали (рис. 4.36). (Готовясь к занятию, я пытался придумать аналогичные квадраты со словами «ПЕТЯ» и «ЖЕНЯ», но ничего не вышло.) Смысл слов «АГАТ» и уж тем более «АШУГ» пришлось объяснять.

Д	И	М	А
И	Т	О	Г
М	О	Д	А
А	Г	А	Т

С	А	Ш	А
А	Ш	У	Г
Ш	У	Б	А
А	Г	А	Т

Рис. 4.36. Нечто вроде магических квадратов, но не из цифр, а из букв.

Задание 2. Продолжение заданий №№ 45-3, 46-2.

Я сказал: «В прошлый раз вы так быстро решили мои задачи, что я сегодня приготовил вам кое-что посложнее. Если вы и эту задачу решите, тогда я вообще не знаю, что с вами делать. Наверное, просто сдаваться». С этими словами я под изумленные возгласы публики развернул фигуру, нарисованную на пяти склеенных листах, которая едва поместилась на столе (рис. 4.37).

Сначала ребята были немного напуганы, но постепенно дело пошло на лад, и вскоре задача была решена. Два-три раза случались заторы, когда ребята отклонялись от *систематического* пути решения и заполняли не по

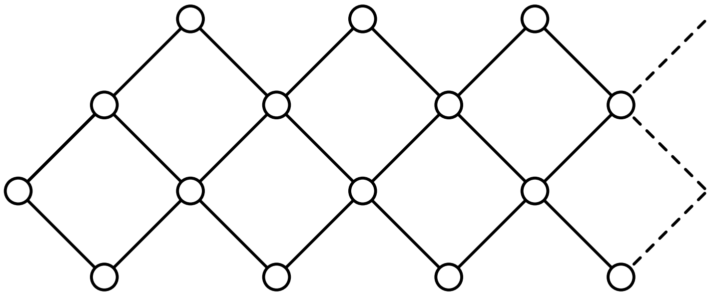


Рис. 4.37. Здесь показана лишь часть графа. Всего в нём 48 вершин — столько же, сколько фигурок в наборе Дьенеша.

две вершины, «подобные» предыдущим, в том порядке, как показано на рис. 4.38 сплошными линиями, а отклонялись от этого порядка, и тогда порой возникали комбинации, не имеющие продолжения. В этих случаях обычно требовалась моя помощь. Несколько раз возникали также ситуации, в которых очередной решающий ставил одну фигурку из двух, а вторая требуемая оказывалась уже занятой. В таких случаях я спрашивал, какая фигурка требуется, и, получив ответ, указывал, что она уже занята. Этой помощи оказывалось достаточно, чтобы дальше ребята находили выход сами.

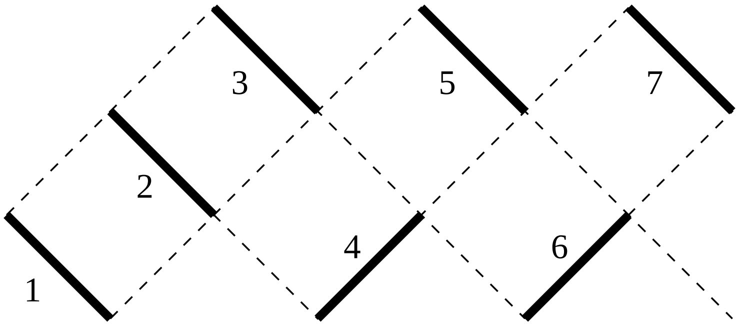


Рис. 4.38. Чтобы решить предыдущую задачу, фигурки лучше всего выкладывать парами. Эти пары показаны на данном рисунке сплошными линиями; очередность пар показана числами. Легко видеть, что каждая пара (кроме самой первой) должна быть согласована всего лишь с двумя уже ранее выложенными фигурками.

Интересно, что во всех задачах этой серии, несмотря даже на мои неоднократные советы, мальчики проявили полную неспособность пользоваться таким тривиальным приемом: при переборе откладывать неподошедшие фигурки в сторону. Они всегда клали их обратно в общую кучу, и после нескольких проб неизбежно начинали повторять уже опробованные раннее и отвергнутые варианты.

Интересно также, что если надо было изменить какой-нибудь один признак, то мальчики чаще всего меняли либо цвет, либо дырку. Реже менялся размер, и еще реже — форма.

Задание 3. C_5^2: последний вариант — шарики в коробочках. См. об этом в главе 3.

4. Доказательство того, что $C_5^2 = 10$. Об этом тоже уже было рассказано там же.

Занятие 48. Истинные и ложные утверждения

20 февраля 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{20}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Истинные и ложные утверждения.

Эта задача похожа на уже упоминавшуюся ранее задачу о «мальчиках и девочках в очках и без очков» (см. стр. 52). Однако есть три существенных отличия: (1) утверждения на этот раз касались не детей, а фигурок Дьенеша; (2) в прежней задаче карточки с рисунками были заготовлены заранее, сейчас же я хотел, чтобы ребята выбирали фигурки сами; (3) утверждения я тогда тоже формулировал сам, мальчикам же оставалось только сказать, верно или неверно; в этот раз я рассчитывал, что и утверждения они будут придумывать сами.

Итак, задача состоит вот в чём: один из игроков кладет на стол несколько фигурок из набора Дьенеша и формулирует про них какое-нибудь правильное утверждение. Следующий игрок должен изменить что-нибудь в этом наборе так, чтобы предыдущее утверждение стало неверным, после чего сам сформулировать верное утверждение, и так по очереди. Мне априори казалось, что это простая и естественная игра. На практике всё оказалось иначе.

Сначала я положил две фигурки и предложил Пете сформулировать верное утверждение. Он тут же поставил меня в тупик, заявив: «Они отличаются одним признаком». Увы, мне не к чему было придраться. А когда появилась третья фигурка и я спросил, что теперь означает предыдущее утверждение (кто «они» теперь отличаются одним признаком?), Петя, не смущаясь, ответил, показывая пальцем на фигурки: «Вот эти — одним, и вот эти — одним, а вот эти — двумя».

Дальше — больше. Каждый раз, когда надо было сделать «правильное утверждение», обычно в качестве него следовало что-то вроде: «Здесь есть один большой красный квадратик с дыркой, и еще два маленьких кружочка без дырки — один желтый и один зеленый, и большой треугольник» (на детальное описание треугольника, видимо, уже пороху не хватило). Всё это было в самом деле правильно, но совсем не то, чего я хотел. И сколько я ни уговаривал ребят делать утверждения попроще, ничего не помогало.

[Впрочем, по-видимому, для ребят такие утверждения и в самом деле проще, в том смысле, что требуют меньше интеллектуальной работы. А утверждения типа: «Все фигурки — без дырок», хотя и более коротки, но требуют наблюдательности, обобщения, проверки результата и т. п.]

Не легче обстояло дело и с изменениями набора так, чтобы предыдущее высказывание стало неверным. Тот из детей, чья была очередь, обычно норовил убрать весь набор целиком и заменить его новым, что, конечно, опять-таки было и правильно логически, и «более просто» психологически. Я ничего не мог с этим поделать.

[В следующий раз надо попробовать ввести логические значки и значки для значений признаков и оценивать высказывания по сложности.]

В довершение сказанного я, не выдержав, раньше времени вмешался и стал делать утверждения о пустых множествах. Например, когда не было ни одной красной фигуры, я сказал: «Все красные фигурки — без дырок». Это вызвало бурные дебаты.

Когда-то, когда мы занимались «мальчиками и девочками в очках и без очков», мне показалось, что ребята поняли смысл условных утверждений. Конечно, я в тот момент просто зарвался. Но по крайней мере тогда они мне дружно покивали — а сейчас устроили мне твердую оппозицию и так и не согласились с моими объяснениями. Одним словом, они молодцы. А я? Всё задание превратилось в сплошную неразбериху.

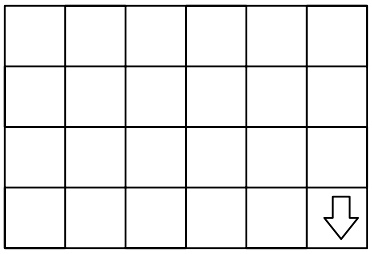
Задание 2. Простые числа.

Мы брали по очереди $1, 2, 3, \ldots, 15$ кубиков и пытались разными способами складывать из них плоские прямоугольники. Таким образом, были получены разложения на множители всех этих чисел. А из простых чисел выходили только полоски.

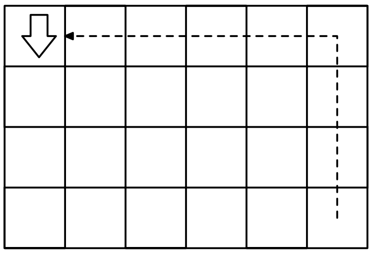
Немного программирования — с одним Димой

Записано 1–8 марта 1982.

Я стараюсь не заниматься с Димой отдельно теми задачами, которые мы проходим на кружке, чтобы не создавать несправедливого перевеса в его пользу, он и без того слегка опережает остальных. Но на этот раз он до такой степени пристал ко мне с просьбой «поиграть в робота», что мне просто некуда было деваться. Задачу он поставил себе сам, показав просто начальное и конечное положения (рис. 4.39).



Начальное положение



Конечное положение

Рис. 4.39. Задача для робота.

В качестве первой попытки Дима повторил программу, которую мы обсуждали на стр. 133—134 (без последнего поворота). Однако испробовав ее (сам), убрал полукруг «конец» и стал добавлять к решению вторую часть. Итоговая программа показана на рис. 4.40.

Фактически ей предшествовало довольно много попыток. В основном все ошибки были той или иной модификацией следующей ошибки. Если надо было произвести какое-нибудь действие, например, «шаг», причем в блок-схеме уже имелся квадратик с оператором «шаг», Дима начинал тянуть стрелку прямо к нему. При этом он не понимал, что после прихода в этот блок ему придется не только сделать шаг, но и последовать по всей цепочке стрелок, выходящей из этого блока. Я попытался объяснить это ему в явной форме, но в следующий раз он вел стрелку к блоку проверки условия или к блоку поворота. Ситуация очень трудная: ведь этому приему я сам их научил, когда советовал вместо пяти операторов подряд «шаг» устроить цикл и возвращаться пять раз к одному и тому же блоку. Выходит, что иногда так можно делать, а иногда — нет, но как провести границу между этими двумя ситуациями, я не знаю. Второй тип ошибки состоял в том, что Дима пытался вывести две стрелки из исполняемого оператора (а не из проверки

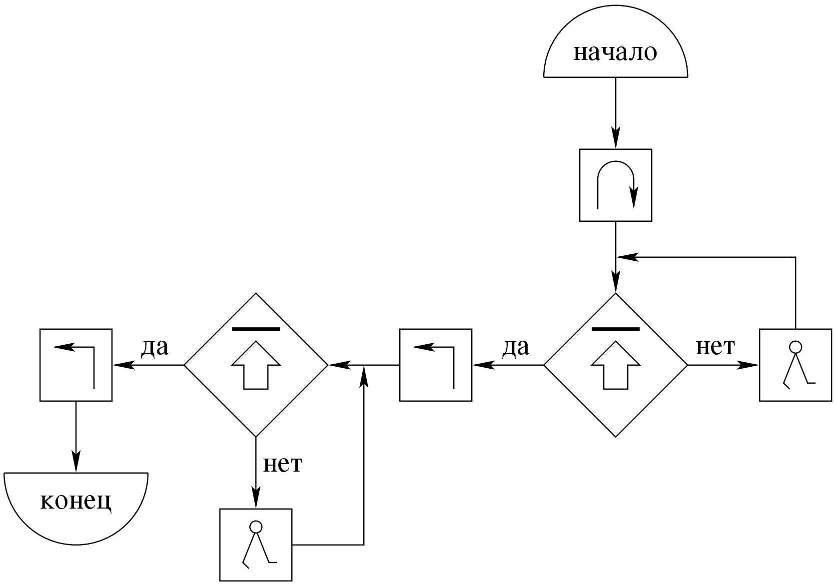


Рис. 4.40. Программа, решающая предыдущую задачу.

условия). Я пытался объяснить ему, что такая программа не имеет смысла, так как не ясно, по какой стрелке идти, но он, видимо, потеряв надежду справиться с задачей, только ныл: «Ну, па-ап! Ну всё-таки давай та-ак!» — «Ну а по какой стрелке ему идти?» — «Вот по этой». — «А когда он дойдет до угла?» — «Тогда по другой». — «А как же он об этом узнает?» — «Я ему скажу...» — «А ты сам как узнаешь?» — «Увижу, когда будет стенка впереди». — «Так почему бы тебе не сделать проверку, есть стена или нет?» — «Но ведь ты же видел, что я делал туда (к первому ромбику) стрелку, и ничего не получалось!» Тут я не выдержал и подсказал ему сделать еще один ромбик. После этого он справился с задачей.

◁ Сам я попросить новые карточки не решался: мне казалось, что ограниченное количество карточек является одним из ограничений языка. Не зря же папа всегда советовал провести стрелку к уже выложенной карточке «шаг», а не класть новую карточку. — Дима. ▷

Кроме того, о чём сказано выше, моя помощь состояла в следующем: во-первых, я вырезáл по его просьбе недостающие элементы; во-вторых, я помогал в отладке (т. е. следил за четкостью исполнения программы); в-третьих, отказывался исполнять синтаксически неверные программы (например, с отсутствующим оператором «конец»).

Постскриптум.

Когда я записывал предыдущий текст, Дима, пробегая мимо, увидел свою программу и решил показать ее Алле. При этом выявились следующие обстоятельства. Во-первых, Дима отказался показывать работу программы по бумаге, а захотел непременно выложить ее из карточек. Видимо, программа, нарисованная на бумаге, кажется ему «ненастоящей». Мои попытки его переубедить ни к чему ни привели. Во-вторых, он обнаружил ошибку в первой версии моего изложения, из-за которой в самом начале программы потребовалось добавить оператор поворота на 180°. Пришлось мне в предыдущем тексте кое-что заклеивать и исправлять. (Здесь приводится уже исправленный вариант.)

После этого Дима стал пробовать, что получится, если действовать по той же программе, но в начальном положении робот, стоя в той же самой клетке (правой нижней), направлен в другую сторону. Оказалось, что, в зависимости от четырех возможных начальных направлений, робот в конце пути оказывается в каждом из четырех углов, но при этом конечное направление всегда совпадает с начальным (рис. 4.41).

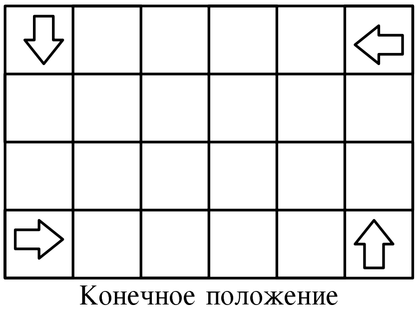


Рис. 4.41. Вначале робот стоит в одной и той же клетке (правой нижней). Для четырех возможных начальных направлений его конечные *положения* будут такими, как показано на этом рисунке. При этом конечное *направление* всегда совпадает с начальным.

Наконец, Дима испробовал ту же программу еще одним, уж совсем не предусмотренным мной способом: он поставил робота под углом 45° к осям, носом в угол (а потом, соответственно, в направлении, перпендикулярном этому). При этом условие «есть стенка впереди» интерпретировалось вполне разумно и по-житейски: «дальше в том же направлении двигаться нельзя». Один из маршрутов (точнее, начальное и конечное положения) показан на рис. 4.42.

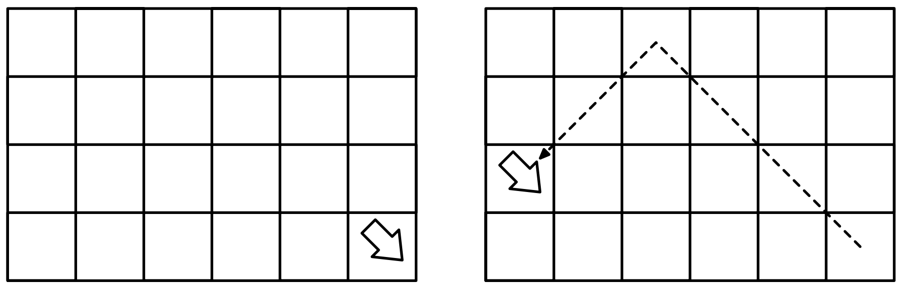


Рис. 4.42. Исполнение той же программы в непредусмотренном контексте.

В заключение я объяснил Диме, почему всегда сохраняется исходное направление: потому, что три поворота (один на 180° и два на 90° в одну и ту же сторону) делаются *всегда*, независимо ни от каких условий (а шаги могут делаться, а могут и не делаться). Он всё понял и тут же пересказал Алле.

Занятие 49. Повод поразмыслить о знаках

6 марта 1982 (суббота) $11^{10} - 12^{10}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Верные и неверные утверждения (продолжение).

На этот раз правила изменились: я ввел кванторы[10] $\exists$ и $\forall$, а также значки для значений признаков:

(1) для цвета: четыре бесформенных цветовых пятна;

(2) для формы: □, △, ○;

(3) для размера: Б, М (в смысле — большой и маленький);

(4) для наличия или отсутствия дырки: ⌖, –.

Надо признать, что идея этих значков осталась не очень понятной. То есть, когда дошло до дела, мальчики сравнительно свободно их применяли, но в процессе «придумывания» у нас произошел длинный спор (особенно с Димой как с самым большим любителем придумывать собственные варианты): дети предлагали свои собственные значки. И это было бы, конечно, только хорошо, но беда в том, что все значки, которые они предлагали, были, так сказать, «комплексные», т. е. один значок включал сразу несколько

[10]Значок $\exists$ означает «существует», а значок $\forall$ — «для всех» или просто «все».

признаков (иногда даже все четыре, т. е. по существу полностью описывал конкретную фигурку; я спрашивал, почему тогда уж не нарисовать просто саму фигурку; но эта идея вовсе не казалась им нелепой). Один из значков, предложенных Димой, я изобразил на рис. 4.43 — он означает «большой красный квадрат с дыркой».

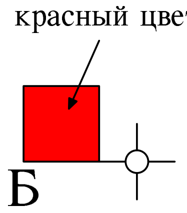


Рис. 4.43. «Комплексный значок», включающий сразу все четыре признака. Использование таких «значков» показывает, что сама идея значка для обозначения не объекта, а *признака*, осталась непонятой.

Я пытался убедить Диму, что такой значок следует засчитывать за четыре, так как он заменяет собой сразу четыре слова; спрашивал: «А что если тебе надо будет просто сказать „красный“, и не говорить, что это — квадрат с дыркой?» Но в ответ получал какой-нибудь другой значок такого же типа. Тогда, чтобы объяснить смысл красного пятна, я выложил все красные предметы вместе и сказал, что нужен один общий знак для них всех. Ответом мне было полное недоумение: как же можно такую кучу нарисовать?

[Всё это, по-видимому, должно означать, что дети пока еще не отделяют признаки от предметов: об этом пишут многие психологи. Видя конкретный предмет, дети, конечно, могут сказать, что он красный, но само понятие «красный», без красных предметов, лишено для них определенного смысла, а потому и не нуждается в специальном значке. Значок должен заменять собой не абстракцию, а что-то весомое, реально существующее. Затронутая здесь проблема более серьезно обсуждается в следующей главе (стр. 170 и далее). А пока пойдем дальше.]

С помощью введенных значков и кванторов мы записывали решения (про каждое множество объектов каждый из нас высказывал по утверждению). При этом каждый получал столько очков, сколько он использовал значков. В конце должен был выиграть тот, кто наберет наименьшее число очков. (Забегая вперед, скажу, что все набрали поровну — 13 очков за 6 утверждений, только я набрал 12 очков.) Действия по изменению набора (так, чтобы предыдущее утверждение стало неверным) мы тоже оценивали: убрать фигурку — одно очко, и добавить фигурку — одно очко.

В таком виде игра явно приобрела бóльшую осмысленность, однако признать ее удовлетворительной всё же пока нельзя. Главный дефект: все (кроме меня, конечно) пользовались только квантором $\exists$. Это очень легко — просто сказать, что «здесь существует такой-то объект». И потом сделать такое утверждение неверным тоже очень легко: нужно просто этот предмет убрать, и всё.

На следующий раз я обещал ребятам, что мы еще раз изменим правила игры: будем пользоваться только квантором $\forall$, а фигурки можно будет только добавлять. Однако, подумав на досуге, я понял, что это потребует введения остальных четырех логических значков[11]: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$. Наша знакомая Н. Б., которая тоже занимается с детьми, говорила, что у нее это идет успешно. Что ж, попробуем. Или я опять зарвался?

Задание 2. Простые числа (продолжение).

Я подготовил большую красивую таблицу, в которую вошли числа от 1 до 28. Для каждого числа есть специальное место, где записывается разложение его на множители, и отдельная графа «для выводов». На данном занятии мы успели рассмотреть всего 4 числа: 16, 17, 18, 19. У меня возникло странное ощущение, что ребята не очень хорошо понимают, что происходит. Так, например, Петя, укладывая 19 кубиков в два ряда, положил их так, как показано на рис. 4.44, и сказал: «Не получается». Когда я исправил его, удлинив один ряд и укоротив другой, он сказал спокойно: «Я же говорил, что не получается».

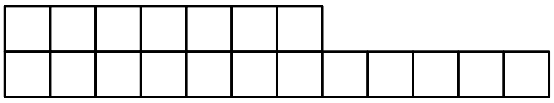


Рис. 4.44. Попытка сложить 19 кубиков в виде прямоугольника.

В одной вещи я очень глубоко неправ и прекрасно это понимаю, но никак не могу с собой справиться. Я почему-то ужасно раздражаюсь от их неумения работать систематично. Вот, например, нужно найти разложение на множители числа 19, т. е. сложить из 19 кубиков прямоугольник. Казалось бы, ежу ясно: нужно сначала попробовать сложить кубики в 2 ряда, потом в 3 ряда, потом в 4 и т. д. Вместо этого Петя сначала пробует 3 ряда,

[11] Логические связки, означающие «и», «или», «не» и «влечет».

потом 2, но не доводит до конца, пытается построить многоэтажную башенку, кто-то разрушает ее случайно, он снова принимается за 3 ряда и т. д. и т. п. Я спрашиваю: «Петя, а ты разве не пробовал уже три ряда?» — «Пробовал». — «Почему же ты еще раз это делаешь?» — «Хочу еще раз проверить». Я едва себя усмирил, но всё же доля язвительности была в моем следующем вопросе (может быть, и сам вопрос возник в результате раздражения): «А ведь правда, ребята, если положить те же кубики по-другому, может быть, получится?», на что Дима заявил: «Папа! Мы ведь этим уже занимались!», — чем немало меня удивил, так как занимались мы этим на самом первом занятии, ровно два года назад.

Тут я еще вставил свою любимую шутку о том, что 5 и 5 на двух руках будет 10, а на одной руке — 9, и показал им это, посчитав пальцы на одной и той же руке от большого к мизинцу и обратно. Но меня раскусили. Однако что делать с числом 19, оставалось неясным — мы ведь так и не попробовали все способы, да и те, что попробовали, уже забыли.

А между тем многократные попытки Пети уложить 19 в три ряда имели под собой очень даже разумное основание. Еще раньше, при обсуждении числа 17, Дима сказал, что ничего не получится, так как 17 — число нечетное, на что Петя совершенно резонно возразил: «Ну почему? Девять же получилось!» — и показал на разложение $9 = 3 \cdot 3$. Потом, когда подошла его очередь заниматься числом 19, Дима снова заявил: «Не получится!», а Петя снова ему возразил: «Получится, получится! Девять же получилось — значит, и девятнадцать получится!» Поэтому-то он и начал с разложения в 3 ряда; но я как-то эту логику проглядел. И даже в самом конце, когда с числом 19 было, наконец, покончено, он в сердцах воскликнул: «Как же так?! Девять получается, а девятнадцать нет!» Мне бы поддержать его склонность к аналогиям, но я ее попросту не заметил, и восстановил только позже, уже задним числом, по памяти.

[Сама проблема — как научить их работать систематично — остается, и она кажется мне очень важной. Это и важный навык сам по себе, и, как мы видели, путь к доказательству. У меня на эту тему нет никаких соображений. Впрочем, Алла считает, что эта проблема решается очень легко: нужно просто подождать лет пять.]

В целом занятие прошло в довольно-таки нервозной обстановке из-за того, что мальчики всё время между собой дрались (все три пары), а также всё время спорили, кто будет первым. Едва ли не треть занятия ушла на то, чтобы их разнимать, пересаживать, улаживать конфликты и проч. Был даже момент, когда я хотел совсем прекратить занятие, до того разозлился.

Занятие 50. Двойной юбилей

21 марта 1982 (воскресенье) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Это занятие является вдвойне юбилейным: во-первых, оно пятидесятое по счету, а, во-вторых, 23 марта нашему кружку исполняется два года. Обо всём этом я сказал ребятам, что, однако, не произвело на них никакого впечатления. Главная причина в том, что я сам не умею создавать атмосферу праздника — не умею делать артистических жестов и говорить торжественным голосом. Вторая причина в том, что для ощущения праздника нужно о нём знать заранее и ждать его, а я почему-то от ребят это скрыл, надеясь на «сюрприз».

(Номинально мы занимаемся раз в неделю. Фактически же, как легко посчитать, получается раз в две недели — вмешиваются то каникулы, то болезни, то еще что-нибудь. Впрочем, этот ритм совершенно разумен. У французских студентов, например, учебный год делится на два семестра по 12 недель, т. е. почти так же, как у нас на кружке. У студентов, правда, бывают еще две экзаменационные сессии, а у нас нет.)

Всё занятие состояло из того, что я прочитал мальчикам сказку Ежи Цвирко-Годыцкого «Как победить колдунью». Заодно мы решили все задачи, содержащиеся в этой сказке, а также познакомились со знаками $\wedge$, $\vee$, $\sim$ (последний знак в книге обозначает отрицание; более употребительным является знак $\neg$) — они потребуются в следующий раз для игры в верные и неверные утверждения.

В конце занятия я подарил каждому из мальчиков по шоколадке и по блокнотику (поскольку Дима и Петя захотели один и тот же блокнотик, пришлось бросать жребий; выиграл Дима).

Занятие 51. Какая дорожка длиннее?

28 марта 1982 (воскресенье) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Дорожки из палочек (задача Шеминской[12]).

Имеются две группы палочек: длинные и короткие; отношение длин 7 : 5. Для того, чтобы их было легче отличать, все длинные палочки — красные, а все короткие — зеленые. Все они сделаны из «палочек для счета» (для первоклассников).

[12]Одна из учениц Ж. Пиаже.

Я складываю зигзагообразную дорожку из длинных палочек (рис. 4.45) и прошу ребят сложить дорожку такой же длины из коротких палочек.

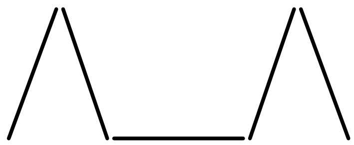


Рис. 4.45. Сложить дорожку такой же длины, но из более коротких палочек.

К моему удивлению, никто не стал прикладывать вторую дорожку рядом, под первой. Все они стали строить свои дорожки в разных концах стола, пытаясь имитировать форму моей дорожки. Но поскольку их изобразительные возможности еще ниже логических, у них у всех вышли какие-то жуткие рогули, нисколько не похожие на мою дорожку. Никаких аргументов в обоснование одинаковости длины никто не привел. Иногда кто-нибудь из ребят колебался, добавлять или не добавлять к своей дорожке еще одну палочку.

Надо было что-то обсудить, но я не знал, к чему прицепиться. Всегда, когда в качестве ответа вместо неверного утверждения получаешь бессмысленное, попадаешь в тупик; и сейчас ситуация была аналогичной. Тогда я просто ввел новое условие: все зеленые дорожки должны быть прямыми.

Началось строительство прямых дорожек, но опять никто не построил новую дорожку под старой. Я не выдержал и сказал: «А вот так будет правильно?» — и сам сделал зеленую дорожку из 4 коротких палочек прямо под красной дорожкой, так что концы пришлись к концам (рис. 4.46).

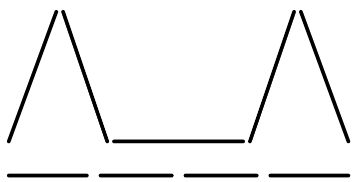


Рис. 4.46. Верно ли, что эти дорожки — одинаковой длины? (Длины палочек подобраны так, что пять длинных палочек равны по длине семи коротким.)

Дима сказал, что так всё будет правильно. Женя сказал: «Неправильно, нужно 5 палочек», — и с этими словами распрямил мою исходную дорожку-зигзаг и стал прикладывать к ней рядом зеленые палочки. Но еще в процессе работы Петя закричал: «Они короткие!» В самом деле, пяти палочек не хватило; Женя поколебался и добавил еще две палочки, стало 7, и дорожки сравнялись.

Тут Дима с подчеркнутой иронией стал говорить: «Да! Конечно! Одинаковые! Вот смотрите: одинаковые!» С этими словами он стал приводить красную дорожку к первоначальному виду. Когда он это сделал, всем пришлось стать лицом к лицу с упрямым фактом: с одной стороны торчала «лишняя» зеленая палочка, а с другой так даже две. «Ну и что?» — сказал Женя, но всё же пошел на компромисс и одну из торчащих «лишних» палочек убрал. Я спросил у Димы, что он об этом думает, и он оставил, как и раньше, 4 палочки.

Тогда я попросил отдельно сложить зеленую дорожку такой же длины, что и красная, *на другом столе*. Произошло небольшое обсуждение между ребятами. Я легким пасом поддержал тот вариант, который был мне выгоден: кто-то из мальчиков сказал между делом: «Их пять штук», а я громко переспросил: «Сколько их?» После этого все единодушно сделали дорожку из пяти палочек. Петя, однако, заявил: «Но они короткие!» Все согласились с ним, что получившаяся дорожка короче, чем исходная.

Наконец-то удобный момент! Я сказал: «А теперь смотрите, что получается. Вот эта дорожка *такой же длины*, и в ней 4 палочки; а вот эта дорожка *короче*, и в ней 5 палочек. Значит, 5 палочек короче, чем 4». — «Ой-ой-ой...», — отреагировал Дима, совершенно потрясенный.

Я предложил ребятам найти выход из противоречия, но никто больше не смог предложить ничего нового. Тогда я просто спросил каждого о его окончательном мнении. Дима сказал, что считает правильным решение с 4 палочками. Петя сказал, что оба решения — и с 4, и с 5 палочками — верные. (Это очень характерно для него. Он всегда прекрасно соображает в начале задачи, но к концу задачи, то ли от усталости, то ли от потери интереса может с легким сердцем сказать что угодно. Я у него спросил: «Значит, дорожки в 4 палочки и в 5 палочек одинаковы?» Нет реакции. «Но ведь ты сам говорил, что эта дорожка *короче*, а теперь говоришь, что это правильное решение». Тоже нет реакции.) Наконец, Женя сказал, что считает верным свое решение, в котором было 7 палочек.

Я никаких комментариев не делал.

[Надо было проделать еще одно упражнение: исходную дорожку из пяти длинных палочек перекладывать так, чтобы расстояние между концами становилось 3, 2, 1, 0 коротких палочек. Аналог того, как я когда-то раздвигал монеты с пуговицами, постепенно доводя ситуацию до абсурда.]

Задание 2. Снова верные и неверные утверждения.

Продолжение задания № 49-1. На этот раз все утверждения должны были начинаться с квантора $\forall$, а фигурки можно было только добавлять — по одной. Разрешалось пользоваться знаками $\vee$, $\wedge$, $\sim$, которые ребята узнали из сказки о колдунье (см. предыдущее занятие). Довольно скоро мальчики столкнулись с тавтологией; утверждение было верным, но сделать его неверным на следующем шаге не удавалось. (Не помню точно, какое было утверждение, но что-нибудь такого типа: «все фигурки — большие или маленькие».) Мы обсудили ситуацию и договорились стараться не делать тавтологий.

Как я и ожидал, ребята легко путались в значениях связок «и» и «или». Для множества, состоящего из одной зеленой и одной красной фигурки, они говорили: «Все зеленые и красные». Я пытался им объяснить, что утверждение должно быть верно *для каждой отдельной фигурки* (в частности, «зеленых и красных» фигурок вообще не существует). Особого успеха я, конечно, не добился. Петя, например, повторял эту ошибку каждый раз, когда до него доходила очередь, хотя я каждый раз ему всё заново объяснял.

По мере продвижения вперед задача становилась всё более трудной. Я вовремя переключился и стал изобретать верные суждения сам, а ребята должны были только делать их неверными. В таком виде мы играли еще довольно долго. Иногда ребята подсказывали мне верные утверждения, но чаще всего это были тавтологии.

Занятие 52. Разгадка шифра

3 апреля 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Шифр.

Я объяснил ребятам, что такое шифры и для чего их используют (для секретности). Потом сказал, что если человек очень умный, то он может прочитать письмо, даже не зная шифра. («Как это?» — «А вот сейчас увидите».) Мы вспомнили, сколько всего в русском языке букв (33), и сколько есть цифр (10). Затем я сказал, что я взял 10 букв и заменил каждую из них цифрой; еще некоторое время объяснял, почему я не могу все буквы заменить цифрами. «Так вóт, — сказал я, у нас есть четыре слова, написанные таким образом, что буквы заменены цифрами:

$$1234, \quad 5678, \quad 9608, \quad 5454.$$

Кроме того, известно, какие это слова:

ДИМА, ПЕТЯ, ЖЕНЯ, ПАПА

(реально я выдал шифрованные и нешифрованные слова в разных порядках); но только неизвестно, где здесь какое слово. Требуется всё расшифровать, т. е. узнать, какое слово где зашифровано, и какая буква какой цифрой заменена».

Сначала, как и следовало ожидать, дети (точнее, Петя), ни секунды не задумываясь, положили слова из цифр и слова из букв друг к другу произвольно. Я сказал: «Давайте проверять», — и мы стали проверять, всё ли получается согласованно. Но не успели мы начать, как Петя воскликнул: «Вот ПАПА!», — и показал на слово 5454. Я потребовал объяснений, и он, хотя и не очень толково, объяснил, что у этого слова, как и у слова ПАПА, два одинаковых слога. Я повторил его объяснение более толково. Тут Петя сказал: «А вот ДИМА», — и показал на слово 1234. «Почему?» — «Потому что оно кончается на букву А». — «А другие слова не кончаются на букву А?» — «Нет, они кончаются на букву Я». — «А вот это ПЕТЯ и ЖЕНЯ» — вступили в разговор остальные. «Правильно. Нужно только узнать, кто из них ПЕТЯ, а кто — ЖЕНЯ». Тут, наконец, вступил в дело Дима, сказав: «Вот это ПЕТЯ», — и показал на слово 5678. «Почему?» — «Потому что оно начинается на букву П». Таким образом, был раскрыт весь шифр:

$$1 \to \text{Д}, \quad 2 \to \text{И}, \quad 3 \to \text{М}, \quad 4 \to \text{А}, \quad 5 \to \text{П},$$

$$6 \to \text{Е}, \quad 7 \to \text{Т}, \quad 8 \to \text{Я}, \quad 9 \to \text{Ж}, \quad 0 \to \text{Н}.$$

В заключение я написал детям вот такое письмо:

3434 34967 1236, 5676 2 9606 361 2 1963

(МАМА МАЖЕТ ДИМЕ, ПЕТЕ И ЖЕНЕ МЕД И ДЖЕМ).

Они, хоть и с трудом, но прочли его.

Здание 2. Отчества. В качестве следующей задачи я собирался дать ребятам довольно сложное генеалогическое древо (из 12 клеток), а также 12 карточек, на каждой из которых было написано имя и отчество некоторого мужчины. Требовалось разложить эти карточки по клеткам, ориентируясь на отчества (Степанович — сын Степана). Но сначала я дал тренировочную задачу: даны всего две клетки (отец и сын), рис. 4.47; одного из них зовут Николай Степанович, а другого Степан Петрович; требовалось узнать, кто есть кто.

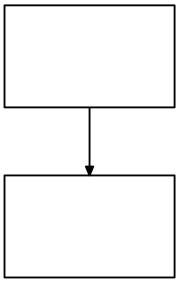


Рис. 4.47. Генеалогическое древо: сверху отец, снизу сын. Одного из них зовут Николай Степанович, другого — Степан Петрович. Кто отец, а кто сын?

Дети, как водится, наобум положили Николая Степановича в отцы, а Степана Петровича в сыновья. Я попытался столкнуть их с противоречием: у *Петровича* отец — *Николай*. К моему ужасу, никто не усмотрел в этом никакого противоречия!

Оказалось, что *ни один из них не имеет ни малейшего представления о том, как получаются отчества.* Дима и Женя вообще не знали, как их зовут по имени-отчеству. Петя знал, что его зовут Пётр Витальевич, но не знал, почему.

Всё оставшееся время я объяснял ребятам, откуда берутся отчества, что такое полное и неполное имя и т. д. и т. п. До само́й задачи мы так и не дошли.

Занятие 53. Генеалогическое древо

10 апреля 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устный вопрос.

Есть курица, которая весит 2 килограмма. («Ого!»; «Ничего себе!»). Про нее задаются два вопроса:

(а) сколько она будет весить, если встанет на одну ногу?

(б) если она встанет одной ногой на одни весы, а другой ногой — на другие, то сколько покажут каждые весы?

Вопросы мы обсуждали отдельно: сначала все ответили на первый вопрос, всё обсудили, потом последовал второй вопрос. В итоге мнения распределились так:

Женя: (а) 1 кг; (б) 1 кг + 1 кг.

Дима: (а) 2 кг; (б) 2 кг + 2 кг.

Петя: он много раз менял свою точку зрения, и итог я так и не запомнил. Помню, что когда речь зашла про двое весов, он назвал 1 кг + 2 кг: на тех весах, где одна нога, 1 кг, а на тех весах, где осталось две ноги, 2 кг.

У Жени в п. (а) я спросил: «А один килограмм, значит, висит в воздухе?» У Димы в п. (б) спросил: «Значит, раньше она весила два килограмма, а теперь четыре?» Оба ответили утвердительно. (Однако через пару дней Дима подошел ко мне на кухне и сказал, что он придумал другое решение задачи про курицу — и назвал Женино решение: (а) 1 кг; (б) 1 кг + 1 кг.)

В заключение задачи я произнес следующее нравоучение: «Когда в позапрошлый раз мы с вами решали задачу про дорожки из палочек, один из вас решил эту задачу верно, а двое остальных неверно...» Тут Дима меня перебил: «А я думаю, что я верно решил». Я продолжал: «Конечно, каждый из вас думает, что именно он решил задачу верно. Ведь если бы ты, Дима, думал, что твое решение неверно, зачем бы ты стал нам его говорить? Ты бы постарался придумать другое, верное решение. Так что каждый из вас думает, что он прав. Но, с другой стороны, ведь вы дали три разных решения, и они не могут быть все три правильными. Так во́т, правильно решил задачу только один; но кто это был, я не скажу! Потому что мне важно не то, чтобы вы знали правильный ответ, а чтобы вы учились сами думать. Вот так же и сегодня: один из вас правильно ответил на первый вопрос, а один правильно ответил на второй вопрос. Но кто на какой — не скажу».

Ребята для порядка немного поныли и поклянчили, чтобы я всё-таки сказал, но не очень настойчиво.

Задание 2. Отчества (продолжение).

Эта задача заимствована из лингвистических олимпиад. На листе бумаги нарисовано генеалогическое древо (рис. 4.48).

Сначала шли устные вопросы. Где отец вот этого человека? Где дедушка вот этого человека? Кем приходится вот этот человек вот этому? (Прадедушкой.) Сколько сыновей у этого человека? Сколько внуков у этого человека? Покажите, у кого нет детей (точнее, сыновей)? Дальше я еще объяснил, что такое дядя и племянник, и задал несколько вопросов на эту тему.

Затем было выдано 12 карточек. На них были написаны следующие имена и отчества:

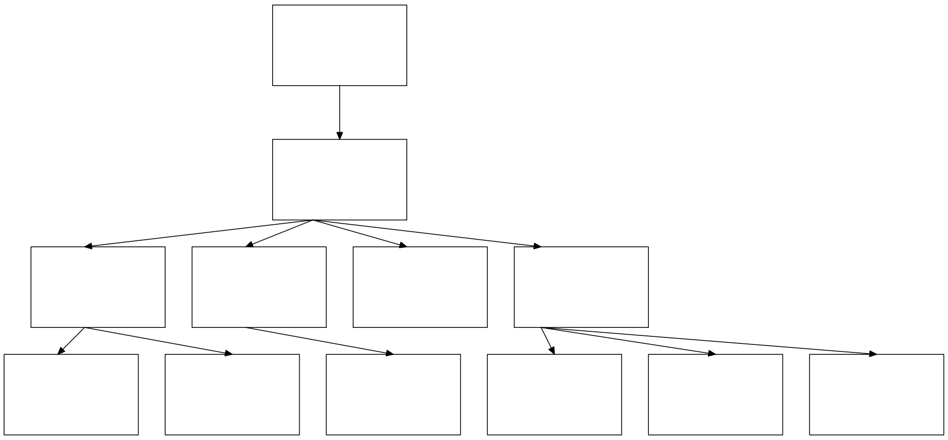


Рис. 4.48. Генеалогическое древо.

ИВАН СЕРГЕЕВИЧ
ПЁТР ИВАНОВИЧ
АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ
СТЕПАН ПЕТРОВИЧ
ВИКТОР ПЕТРОВИЧ
БОРИС ПЕТРОВИЧ
ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
НИКОЛАЙ СТЕПАНОВИЧ
ОЛЕГ БОРИСОВИЧ
ГЕННАДИЙ БОРИСОВИЧ
ВАСИЛИЙ БОРИСОВИЧ

После многочисленных проб и ошибок все они были расставлены по соответствующим клеткам. Моя помощь требовалась несколько раз для активизации поиска, так как ребята, попав в тупик, лениво и равнодушно отступали. Дима по-прежнему путался с отчествами: его внимание всё время сбивалось вторым словом (отчеством) самого человека: в паре Степан Петрович $\to$ Николай Степанович трудно сопоставить первое слово с четвертым, так как средние два слова отвлекают внимание. Фактически с задачей справился один Петя.

Дальше снова последовали устные вопросы того же сорта, что и раньше, но на этот раз с указанием конкретного имени, например: сколько племянников у Александра Петровича? Как зовут дедушку Геннадия Борисовича?

Лучше других снова отвечал Петя: он хорошо читает и поэтому быстрее Димы и Жени находил нужные имена.

Задание 3. Простые числа (продолжение задачи № 49-2).

На этот раз разобрали числа $21, 22, 23, 24, 25$.

Занятие 54. Конец учебного года

1 мая 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)

(Дима, Петя, Женя)

Занятие состоялось 1 мая, а записываю я его только 18 октября: до сих пор всё не находилось времени. Естественно, многие подробности из памяти стерлись, так что конспект во многом схематичен.

С самого начала я заявил, что это занятие будет последним в этом учебном году, на что Дима откликнулся, закричав: «А-а, опять дипломы давать будут!»

Задание 1. Фокусы с задуманными числами.

Это очень эффектная игра, которая производит впечатление даже на взрослых, если они не очень сильны в математике. Общая схема ее такова: «Задумай число; прибавь к нему два; отними задуманное число; у тебя получилось два». Разумеется, задание можно варьировать до бесконечности: «Задумай число; прибавь два; прибавь еще раз задуманное число; подели на два; отними задуманное; у тебя получилось один». Правда, необходимо, чтобы участники хорошо умели считать, а в нашем случае это было не совсем так, и из-за этого фокус иногда не удавался. Только Дима всё досчитал правильно. Женя совсем сбился и просто сказал: «Не знаю». Тогда я ему дал самый простой вариант, процитированный выше. С ним он справился, а Дима догадался до принципа фокуса и сказал: «А-а, понимаю, почему получится два...», — и далее всё объяснил.

Задание 2. Сделай слово сильнее.

Эта лингвистическая игра в точности совпадает с одной из функций (или трансформаций?), которые используются школой Мельчука—Гладкого—Апресяна для формализованного описания семантики — а именно, с функцией *Magn*. Дается слово, а к нему требуется придумать слово с тем же смыслом, но усиленным. Например, преподаватель говорит *дождь*, а ученик отвечает: *ливень* («дождь стал сильнее»). Вот слова, которые я использовал:

ветер $\to$ ураган	холод $\to$ мороз
тепло $\to$ жара	молоток $\to$ молот (кувалда)
комната $\to$ зал	смех $\to$ хохот
улица $\to$ проспект	страх $\to$ ужас
спортсмен $\to$ чемпион	сладкий $\to$ приторный
умный $\to$ мудрец	большой $\to$ огромный

Вообще мне кажется, что такого рода семантические игры, в которых выявляются *сигнификаты*, т. е. отношения между словами, а не *денотаты* — отношения слов к предметам (если я только правильно понимаю, что такое сигнификат) — такие игры кажутся мне очень полезными и очень важными для развития культуры мышления вообще. К сожалению, я пока не придумал на эту тему ничего интересного, кроме тривиального переворачивания той же игры: *сделай слово слабее*: мокрый $\to$ сырой (влажный), улица $\to$ переулок, смех $\to$ усмешка (улыбка) и т. п.

Задание 3. Простые числа — окончание.

На этот раз мы завершили таблицу с простыми и составными числами, рассмотрев оставшиеся три числа: $26, 27, 28$. После этого в самой правой колонке таблицы мы «подвели итоги», т. е. у каждого простого числа поставили букву П, у каждого «квадратного числа» нарисовали квадратик (для нас это имело не формальный, а совершенно образный смысл — ведь мы и складывали из наших кубиков квадраты), у каждого «кубического числа» нарисовали кубик.

Задание 4. Пятерка.

Теперь каждый получил по листу бумаги, разграфленному прямыми линиями на клетки разных форм и размеров. В каждой клетке стояло число. Требовалось закрасить фломастером те клетки, в которых стоят простые числа. При закрашивании разрешалось обращаться за справками к составленной нами таблице. «А, знаю, — сказал Дима, — пятерка получится».

И в самом деле, после закрашивания нужных клеток на листе образовалась большая красивая пятерка.

5. Заключение: дипломы.

Я объявил, что каждый получает за год пятерку, а также диплом об окончании второго года и подарок. Подарок был у всех одинаковый — игра в 15. Текст диплома гласил:

ДИПЛОМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Этот диплом дан Диме Звонкину за то, что он два года занимался математикой и стал еще умнее, чем в прошлом году.

(Что мы будем писать на будущий год?) В качестве рисунка изображена клетчатая комната, «робот» и алгоритм на нашем языке, а также игральная кость и божья коровка.

На этом занятие закончилось. Боря[13] нас фотографировал.

[13]Женин папа.

Глава 5.

Простое и сложное: об обозначениях, процессе абстрагирования, математике и языке

Значки для слов

Трудности, с которыми я столкнулся, пытаясь ввести «знаки для признаков» (см. стр. 155—156), навели меня на долгие размышления. Результатом явились три статьи: одна — в сборнике «Язык и структура знания», 1990, вторая — в журнале «Вопросы языкознания», 1990, № 6 (обе — с благословения уже неоднократно упоминавшейся здесь Р. М. Фрумкиной), а потом и более популярная статья в журнале «Знание—сила», 1991, № 8.

Смешно сказать, но основополагающую идею этих работ мне подсказал Дима. Только в тот момент я этого не заметил; восстановил ход событий позже — по памяти, по записям. Задача, как мы помним, ставилась так: сформулировать «как можно более простое» утверждение о множестве фигурок из набора Дьенеша. Еще в самом начале обсуждения Дима предложил измерять сложность утверждения количеством слов в нём. Но это еще не тот момент, не кульминация. А потом, после наших споров и взаимных недоумений, он как-то на минуту отвлекся, задумался — и сказал: «Я, кажется, понял, папа. Ты хочешь, чтобы мы придумали *значки для слов*».

Я пропустил это замечание мимо ушей. Думаю, что в тот момент я еще не был готов к осознанию заложенной в нём идеи.

Значки для слов! Да ведь это же буквально скачок через пропасть!

В самом деле — возьмем, скажем, слово «красный». Я подчеркиваю: не понятие, скрывающееся за этим словом, не значение признака «цвет», не класс красных предметов, а именно слово как таковое. Слово «красный» — это вещь довольно-таки конкретная. Конечно, не такая конкретная, как стакан или велосипед, в руки его не возьмешь и на зуб не попробуешь; но всё же это и не «одно из значений признака “цвет”». С логической точки зрения слово является абстракцией, с психологической это вовсе не так. В том, чтобы слову сопоставлять знак, тоже нет ничего удивительного. Его можно, например, записать буквами, как обычно. Но писать буквы трудно и долго. Поэтому, если слово очень нужное и часто встречается, то почему бы не придумать для него более простой значок (своего рода иероглиф)? Более того, опыт показывает, что конкретный вид таких значков очень скоро становится безразличен: дети быстро научаются смотреть сквозь них.

Казалось бы, ничего особенного не произошло: дети просто научились сопоставлять словам знаки. Однако когда мы возвращаемся в реальный мир и пытаемся теперь сопоставить полученному знаку некий объект, то таким объектом оказывается вовсе не «большой красный квадрат с дыркой», от которого мы отталкивались, а весь класс красных предметов. Вместо недоступной для понимания цепочки

$$\text{признак} \to \text{одно из его значений} \to \text{знак} \to \text{класс}$$

мы построили другую, обладающую «лучшей проходимостью»:

$$\text{предмет} \to \text{слово} \to \text{знак} \to \text{класс}.$$

Появление в этой цепочке лингвистического объекта «слово» позволяет разорвать порочный круг, когда знаки вводятся как средство усвоения понятия класса, но смысл самих знаков остается непонятным, пока понятие класса не усвоено.

Что же делает возможным такой скачок? Почему слово оказывается такой волшебной палочкой-выручалочкой?

Если мы задумаемся над этим вопросом, то придем к весьма удивительным выводам. Мы поймем, что слово — это и есть тот самый знак, который мы столь упорно и безуспешно пытались построить, — знак, отвечающий значению признака и уже оторвавшийся от предмета. (А слово «цвет» — так это уж и вообще абстракция более высокого уровня: это знак для класса объектов, которые сами являются абстракциями.) Та работа по абстрагированию, которая оказывается не под силу ребенку шести-семи лет, уже была проделана им же бессознательно в возрасте полутора-двух лет, когда он учился говорить. Вводя слово в качестве промежуточного этапа, мы как бы пользуемся результатами проделанной ранее работы. Именно этот смысл я и придаю выражению «абстракции с языковой поддержкой» (название одной из моих статей). Пытаясь вывести значки непосредственно из множества объектов, мы пытаемся повторить ту же работу еще раз, причем на сознательном уровне. Скорее всего, в данном возрасте это просто невозможно. Но если мы выводим значки из слов, нам помогает язык.

В книге Марии Фидлер «Математика уже в детском саду» чуть ли не половина посвящена значкам для значений признаков. Прежде всего, многие из значков крайне неудачны. Они сложны и порой трудно воспроизводимы. Дети либо не могут изобразить такой значок, либо, если и могут, то, пока нарисуют, забудут, какую задачу они решали. Во-вторых, смысл отдельного значка не ясен без сравнения его с другими; так, домик с двумя окнами кажется бóльшим лишь на фоне домика с одним окном; если же смотреть на него отдельно, то вовсе не очевидно, большой он или маленький. Но всё это было бы еще терпимо, если бы книжка содержала главный совет: значки должны заменять собою слова, а не классы объектов. Наоборот, классы объектов потом появятся (т. е. окажутся понятыми) с помощью этих значков. Если же поступать так, как сказано в книге — и как пытался делать я на своем занятии (вовсе не из-за книги — я в тот момент ее еще не читал — а в силу совершенно «естественного» хода мысли), то получается психологический круг.

«Упрощенные» обозначения

Некоторые задачи на абстрагирование не имеют поддержки в естественном языке, и тогда для детей они могут оказаться непреодолимыми. А взрослому они порой кажутся даже более легкими. Педагог здесь очень легко может попасть в ловушку.

Рассмотрим всем знакомый пример. Чтобы научиться читать, ребенок должен понять, как звуки и буквы соответствуют друг другу. Звуков много, букв тоже, да и соответствие между ними далеко не однозначно. Например, «ль» — это один звук, но две буквы; а «е», напротив, одна буква, но сразу два звука: «й-э». И это уже не говоря о проблеме безударного «о», произносимого как «а», не говоря о звонких и глухих согласных, о букве «г», читающейся как «в» (всего), и еще о многих других проблемах правописания. Одним словом, задача не из легких. Чем тут можно помочь?

Ну, ясное дело, чем. Нужно «упростить обозначения», а также разбить глобальную задачу на несколько этапов — сначала совсем простых, а потом постепенно усложняющихся. Давайте заглянем в букварь[1] и посмотрим, каковы эти этапы. Вначале на короткий период вводятся специальные обозначения для предложений и слов. Затем возникают обозначения для слогов — разные для ударных и безударных слогов. После этого появляются значки для отдельных звуков, но не для конкретных звуков типа «а» или «у», а для абстрактных «звуков вообще». Постепенно значки становятся всё более и более разнообразными: квадратик — для «звука вообще»; прямоугольник, разделенный диагональю — для двух соседних «звуков слияния»; красный кружочек — для гласного звука и черный либо синий — для согласного (в зависимости от его мягкости или твердости). Здесь же на фонетической схеме слова присутствуют и некоторые дополнительные элементы: ударение, специальный знак, выделяющий изучаемую в данный момент букву и т. д. и т. п. Постепенно, когда разнообразить значки уже дальше становится некуда, их начинают заменять буквами.

Попытаемся понять, в чём состоит фундаментальный дефект такой методики. При желании можно придумать и предложить детям специальный значок для слова «кошка», другой значок — для слова «самолет», еще один — для слова «чайник». Понимание смысла таких значков вряд ли вызовет у детей какие-либо трудности. При последовательном проведении подобной методики мы пришли бы к какой-то разновидности иероглифической системы письма. Тяжкий груз для памяти, но с психологической точки зрения выглядит совершенно естественно: каждый знак здесь имеет языковую поддержку. Но как только мы пытаемся ввести знак для «слова вообще», для какого-то неизвестного заранее слова, т. е. своего рода алгебраическую переменную со значениями во множестве слов, так тут же мы потерпим полный провал. Требуемый уровень абстракции оказывается весьма высок, а языковая поддержка отсутствует. Разница здесь в точности та же, что между цифрой 7 для обозначения числа *семь* в арифметике и буквой x для обозначения «некоторого числа» в алгебре.

Аналогичная картина имеет место на уровне слогов. Легко понять смысл значков, которые обозначают слог «ба», или слог «му» и т. д. С их помощью можно придти к какой-то разновидности слогового письма, примеры чему в истории тоже имеются. Но невозможно первокласснику понять смысл значка «некий абстрактный вообще-слог». И далее, уже на уровне буквы–звука — понять, что буква «а» отвечает соответствующему звуку, безусловно, гораздо проще, чем понять, что синий кружок отвечает какому-то элементу из множества гласных звуков. Звук «а» — это конкретная «психологическая

[1] Я уже давно не видел российских букварей и не знаю, как они сейчас выглядят. Так что пишу я о том букваре, который был принят в школе 15—20 лет назад.

реальность», а множество гласных звуков — это абстракция. В лучшем случае соответствующий знак можно воспринимать как загадку: угадай, какая буква здесь стоит. (Именно так относились к этому мои кружковцы: они с удовольствием разгадывали упомянутые схемы фонетического разбора, воспринимая их как своего рода забавные ребусы. Возможно, нечто аналогичное происходит и с другими интеллектуально развитыми детьми. Обязательным условием при этом является умение читать.)

Чтобы быть правильно понятым, позволю себе сделать еще одно уточнение. Придумывая значки-иероглифы для слов, мы на равных правах с другими словами могли бы изобрести и значки для таких слов, как *слово*, *слог* и *звук*. Только тогда во фразе «*Хотел бы в единое слово...*» первый знак встретился бы один раз, а вовсе не пять, а во фразе «*Звук одинокий и глухой...*» третий знак тоже встретился бы всего один раз, хотя звуков в этой фразе 19 (в этом примере их столько же, сколько букв).

Помню наше первое родительское собрание. Учителя́ уже по опыту знают, что дети — даже те, кто уже умеет читать — все эти «схемы фонетического разбора» понять без помощи родителей не могут. Значит, первая задача — обучить этой премудрости родителей. Этому и посвящена наша встреча. Однако и родители вовсе не все семи пядей во лбу; когда учительница дошла до звуков слияния и звуков примыкания, среди родителей началась паника. И тогда учительница произнесла одну замечательную фразу — фактически приговор всей системе. Она сказала: «Вы только не волнуйтесь; вот кончится букварь, и тогда всё будет гораздо проще». Потом, подумав, добавила: «Только, пожалуйста, побольше читайте с ними дома. А то программа у нас трудная, и мы не успеваем учить их читать». О том, что сама методика придумана как раз для того, чтобы научить детей читать, никто уже давно не вспоминает.

На уровне здравого смысла всё это довольно-таки очевидно. А между тем привести какой-нибудь «научный» аргумент против указанной методики не так уж легко. Ведь *формально говоря*, предлагаемые обозначения и в самом деле проще, чем обычная система письма. Вместо тридцати трех знаков-букв нам предлагают всего четыре-пять; при этом соответствие между знаками и тем, что они обозначают, тоже более простое — оно взаимно однозначное. Беда заключается не в знаках, а в том, что́ они обозначают, в *обозначаемых объектах*. Это абстракции, лишенные языковой поддержки. Во внутреннем мире ребенка таких объектов просто не существует.

Отвлекаясь на минуту от малышей, хочу вспомнить здесь свой спор с одним энтузиастом-математиком. Он собирался работать со средними классами (6-й — 8-й) и с восторгом рассказывал нам о своей революционной идее: вместо геометрии школьникам нужно преподавать линейную алгебру. Ну да — ведь это же *гораздо проще*! Он придумал систему, в которой всего четыре аксиомы! И все доказательства более простые и более короткие! Приходилось признать, что да — они и в самом деле более короткие; честно говоря, они к тому же и более строгие, чем привычные нам геометрические доказательства. Вот только как до них додуматься? Наша геометрическая интуиция, возникшая из опыта жизни в реальном трехмерном физическом мире, на этот раз не давала никакой путеводной нити. Школьники на его уроках чувствовали себя так, как должен чувствовать себя ученик, начисто лишенный музыкального слуха, на уроках сольфеджио.

В одном человеке сосуществуют разные интеллекты

Теперь, оставив в стороне школу, вернемся к процессу освоения языка и поразимся еще раз этому загадочному явлению — тому, что задача сопоставления знаков классам объектов, непосильная для семилетнего, с необычайной легкостью и вовсе незаметно решается малышом от года до двух. Когда начинаешь вдумываться в это явление, оно не становится более понятным. Напротив, масштабы удивительности всё разрастаются при виде не разницы даже, а той гигантской пропасти, которая разделяет возможности одного и того же человека в решении весьма сходных задач, но с помощью разных подсистем своего интеллекта.

Мы многие вещи делаем бессознательно, не умея объяснить того, как именно мы это делаем: ходим, едим или, скажем, сворачиваем кулек из листа бумаги (попробуйте-ка написать инструкцию по сворачиванию кулька!). Одно из таких неосознанных умений — это умение говорить. Оно, однако, выделяется среди всех прочих умений тем, что процесс порождения речи требует постоянного решения интеллектуально-логических задач. Когда-то на меня произвела очень сильное впечатление случайно попавшаяся на глаза статья известного лингвиста Григория Крейдлина «Лексема “даже”». Вся статья, более десяти страниц, была посвящена объяснению смысла слова «даже». Оказывается, смысл этого слова можно описать в виде четырех логических утверждений, достаточно сложных самих по себе и к тому же взаимосвязанных. В работе показывалось также, что любое неправильное, «режущее слух» употребление этого слова (типа «ложка даже лежит на столе») связано с нарушением по крайней мере одного из четырех условий. Таким образом, каждый раз, употребляя в речи слово «даже», мы в доли секунды решаем сложную логическую задачу «в четыре действия». И это только для одного слова![2] А ведь есть еще другие слова (еще одна статья того же автора: «Лексема "а"»), и грамматическое построение фразы, и связь с контекстом, и, возможно, много чего еще, о чём мы пока не подозреваем. Все эти задачи решаются одновременно, параллельно и с молниеносной скоростью.

Пожалуй, наиболее удивительно то, что с этим столь же легко справляются умственно отсталые дети. Попробуйте дать такому ребенку какой-нибудь тривиальный силлогизм или геометрическую задачу, и он с ними не справится. А вот слово «даже» употребляет свободно и вполне грамотно. У дефектологов есть даже такой термин — *вербализм*. Его относят к умственно отсталым детям с хорошо развитой и свободно льющейся речью. При поверхностном знакомстве они могут произвести впечатление вполне развитых; их отставание не бросается в глаза и поэтому не всегда легко поддается диагностированию. Лишь большие трудности, испытываемые таким ребенком при решении логико-математических задач, позволяют выявить задержку в развитии. И уж совсем поразительно: известны случаи олигофрении, причем в сравнительно тяжелой форме, у детей, родившихся в двуязычной семье. Как правило, заболевание не мешает такому ребенку без труда освоить два языка.

Мы поневоле вынуждены придти к выводу, что в нашем мозгу сосуществуют два (*как минимум два*) отдельных и независимо функционирующих интеллекта. Один — сознательный, или, лучше сказать, осознаваемый. С его помощью мы решаем математические задачи, пишем программы, классифицируем, разбираемся в инструкции по пользованию пылесосом. Второй — бессознательный. С его помощью мы решаем очень похожие (и, как правило, гораздо более сложные) задачи в другой области — языковой. Не следует считать, что эти два интеллекта никак не связаны друг с другом. Напротив, концепция «языковой поддержки» для развития абстрактного мышления — не что иное, как призыв эксплуатировать связь между ними в той степени, в какой это возможно, протаптывать тропинки от одного интеллекта к другому. Тем не менее, эти две системы существуют и действуют раздельно, и, чтобы эксплуатировать связь, эту их раздельность следует четко осознавать.

Невозможно представить себе, чтобы владение языком опиралось на те же самые нейробиологические структуры, что и сознательный интеллект. Мозг человека растет, и нейронные связи в нём формируются как раз тогда, когда он учится говорить. Ни одного Маугли научить говорить пока не

[2]Ровно в тот день, когда я работал над корректурой этой главы, я позвонил Григорию Ефимовичу Крейдлину. Среди прочего, я узнал от него, что другие лингвисты подхватили эстафету, и за прошедшие более 20 лет понимание слова «даже» значительно расширилось и углубилось. То есть на самом деле мы решаем задачу еще более сложную, чем я предполагал, когда об этом писал.

удалось. Программист сказал бы, что программа владения языком «впаяна в железо». В этом и заключается метафора «языковой поддержки» — это аналогия так называемой аппаратной поддержки в программировании. Аппаратно реализованная функция — это тоже некая программа; однако эта программа существует в компьютере не в виде текста, а в виде электрических соединений, отвечающих определенной схеме, или в виде структуры кристалла. Программная же реализация какой-либо функции предполагает написание текста, сводящего эту функцию к последовательному выполнению аппаратно реализованных примитивов.

Разница здесь в том, что аппаратно реализованные функции обладают несравненно более высоким быстродействием. Если в старинных компьютерах аппаратно были реализованы лишь простейшие булевы операции над единичными битами, то в современных компьютерах, особенно специализированных, таковыми могут оказаться весьма сложные операции. А выполнение на том же компьютере другой, в принципе более простой операции, может потребовать составления специальной программы и будет выполняться заметно медленнее.

Вот и возникает парадоксальная ситуация: иногда, чтобы составить эффективную программу, нужно свести задачу к набору нескольких *более сложных* задач, но зато аппаратно реализованных, «впаянных в железо». Про задачи, легко сводимые к аппаратно реализованным функциям, говорят, что они имеют аппаратную поддержку. Отсюда и термин «языковая поддержка»: заданная ребенку простая задача сводится к более сложной, но уже предварительно решенной в нашем естественном языке.

Есть такая очень странная душевная болезнь — ранний детский аутизм (правильнее было бы говорить просто аутизм, так как взрослые аутисты тоже существуют). Происхождение этой болезни во многом загадочно, а методы лечения напоминают скорее искусство, нежели следование каким-то рецептурным схемам. Основная особенность аутистов состоит в том, что они испытывают большие трудности в общении с другими людьми. С этим связаны и другие отклонения в развитии. В контексте нашего обсуждения аутизм интересен тем, что предоставляет множество примеров явления, противоположного вербализму: тяжелые нарушения речевого развития нередко соседствуют с высокоразвитым интеллектом, с высочайшими способностями к решению задач логико-математического плана и вообще повышенным интересом к интеллектуальным сферам деятельности. В этой связи нередко возникают споры о том, являются ли аутичные дети умственно отсталыми.

Клара Парк, мать аутичной девочки, в своей книге «Осада»[3] вспоминает, как она привела дочь в школу для умственно отсталых детей. Девочка на три-пять лет опережала своих одноклассников по умению решать математические задачи, но столь же сильно отставала от них в умении составить простейшую фразу типа «А что сегодня на завтрак?». Создавалось впечатление, что она обращается с родным языком как с иностранным — каждую фразу ей приходилось конструировать с помощью сознательного процесса построения предложений по определенным правилам. Очень характерна также и разница в трудности освоения слов разного типа: такие слова, как «семиугольник» или «сумма», не вызывали никаких проблем; а вот смысл слов «я» или «да» девочка не могла усвоить в течение нескольких лет.

Фактически спектр отклонений от нормы оказывается гораздо шире, чем в приведенных выше примерах; именно с этим и связана моя оговорка: *как минимум два* интеллекта. Целые россыпи примеров можно найти, например, в книгах нейропсихолога Оливера Сакса «Антрополог на Марсе» и «Человек, который путал свою жену со шляпой»[4]. Доктор Сакс рассказывает истории людей, которых психологи когда-то, в эпоху до политической корректности, окрестили «гениальными идиотами». Например, Стивен Уилтшир. Он не только плохо говорит — на этот раз и настоящая умственная отсталость не вызывает сомнений. Например, он оказался неспособен понять, почему машинам трудно съезжать с крутой горы. И в то же время Стивен — гениальный рисовальщик. Альбомы с его рисунками охотно раскупаются и вызывают восторг и у любителей, и у профессионалов. Или аутичная девочка Надя: другой автор посвятил ей целую монографию. В возрасте трех с половиной лет она начала рисовать лошадей; при этом она каким-то образом миновала все обычные промежуточные стадии рисующих детей. Все дети начинают с бессмысленных каляк, потом переходят к схематическим «головастикам» — кружочкам с палочками и т. д. Надя же сразу начала рисовать профессионально: передача пространства, движения, полутонов, перспективы — всё в ее рисунках было сразу и без подготовки на таком уровне, какого наиболее талантливые дети (такие, как Пикассо) достигают не ранее, чем к десяти годам. При этом она постоянно экспериментировала с разными углами зрения, ракурсами и перспективами. Как если бы там, где у нормальных детей вырастает орган речи, у Нади вырос орган рисования. Сакс рассказывает нам о Мартине, умственно отсталом музыканте, любимым композитором которого был Бах. Автор долго не мог понять: как же

[3] Clara Claiborne Park «The Siege. The First Eight Years of an Autistic Child», Little, Brown and Company, 1967.

[4] Oliver Sacks «An Anthropologist on Mars», Vintage Books, 1996; «The Man Who Mistook His Wife for a Hat», HarperCollins, 1985.

так, ведь Бах, казалось бы, такой интеллектуальный композитор! Постепенно, однако, стало ясно, что Мартин обладает особого рода музыкальным интеллектом, с помощью которого понимает — хотя и не может сформулировать — сложнейшую структуру вариаций, инверсий, сочетания голосов в каноне или в фуге и многие другие вещи. Постараемся понять: если бы мы не учили в школе грамматику, мы бы, может быть, даже не догадывались о ее существовании — и при этом склоняли бы и спрягали все слова и строили фразы в полном соответствии с ее правилами. Наш языковой интеллект функционировал бы с ничуть не меньшей эффективностью. (Кстати, языки тех народов, которые никогда не знали ни письменности, ни науки, по сложности ничуть не уступают нашим.) Вот так же и у Мартина: его имплицитный, неосознаваемый музыкальный интеллект был на высочайшем уровне. Но объяснить «музыкальную грамматику» нам с вами он бы не смог, да и чужих объяснений бы не понял, т. к. был умственно отсталым.

Среди гениальных идиотов встречаются и своего рода «математики». Как, например, двое аутичных близнецов, которые развлекались тем, что сообщали друг другу многозначные простые числа. Единственным способом втереться к ним в доверие было сообщить им большое простое число: тогда у вас появился бы шанс быть принятым в их компанию. К сожалению, из таких людей невозможно вырастить настоящих математиков. Математика — это *человеческая деятельность*; сравнительная ценность задач и правильный их выбор в математике гораздо более важны, чем способность совершать сложные действия в уме.

Оливер Сакс ссылается на книгу, в которой развивается теория нескольких интеллектуальных подсистем внутри нас: Howard Gardner «Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences», N.-Y.: Basic Books, 1983. Я ее пока не читал; надо будет как-нибудь добраться.

Многие исследователи склоняются к тому, что решающую роль в процессе овладения языком играет так называемая «невербальная», т. е. попросту животная, коммуникация. Язык мимики и жестов, взглядов и интонаций, которым мы владеем инстинктивно как биологические существа, подобно кошкам и обезьянам — именно этот язык лежит в основе развития нашего первого, бессознательного интеллекта и в основе процесса овладения языком. В то же время очень похоже, что корень проблем аутичных детей лежит именно в сфере «животной» коммуникации. Об этом пишет Оливер Сакс; эту же точку зрения развивает и Николас Тинберген, лауреат Нобелевской премии по биологии, один из создателей этологии — науки о поведении животных, много лет изучавший аутизм. Но здесь мы, пожалуй, вступаем на совсем уж зыбкую почву теоретизирования и спекуляций. Пора вернуться в более знакомый нам мир.

Учить математике так же, как мы учим детей говорить

Давайте представим себе, что мы учили бы детей говорить так же, как мы учим их математике. Эдакая антиутопия...

Наверное, мы бы начали с того, что научили бы их сначала произносить гласные звуки: мне кажется, что гласные звуки легче для произношения, чем согласные. Потом перешли бы к согласным. Дальше были бы слоги. Только ни в коем случае не опережать события: пока слоги как следует не усвоены, к словам переходить нельзя! Наконец, после одного-двух лет упорных тренировок начинают появляться слова. В какой момент уже можно сообщить ребенку, что слово имеет какой-то смысл? Наверно, не ранее, чем он овладел... не знаю чем. Надоело фантазировать. Но еще один дополнительный аспект отметить необходимо. Мы — мудрые всезнайки-взрослые — знаем, что умение говорить очень полезно для жизни. Дети бы со временем тоже об этом узнавали — но только после нескольких лет усердной учебы с неясными целями.

В реальности, слава богу, ничего подобного не происходит. Родительский инстинкт подсказывает нам, что с ребенком нужно просто разговаривать, и всё. Причем делать это нужно с первых же дней его жизни. И ничего страшного, что он пока ничего не понимает: его понимание будет расти вместе с ним самим. Неважно также и то, что он пока ничего не может сказать сам: со временем научится. Но самое важное, пожалуй, даже и не это. Самое важное то, что мы разговариваем с ним вовсе не для того, чтобы «обучить его словам, выражениям и построению фраз»; мы *общаемся* с помощью речи. При этом общаемся мы с ним *в процессе совместной деятельности*. Мы не говорим ему: «Мама мыла раму. Повтори! Нет, плохо; еще раз!» Мы говорим ему: «Хочешь морковку?», — и даем морковку. Мы говорим: «Ну, давай, иди к бабушке», — и показываем на бабушку, а бабушка уже с готовностью раскрывает объятия. И ребенок, еще плохо понимая слова, уже вполне понимает, что ему надо делать.

Конечно, на наше счастье все дети (кроме очень специальных случаев) обладают тем самым «языковым инстинктом», о котором писал уже упоминавшийся ранее Стивен Пинкер[5], и поэтому усвоение языка происходит как бы само собой. В случае с математикой рассчитывать на это труднее. И всё же, и всё же! Если бы мы были начисто лишены какого бы то ни было «математического инстинкта», то, наверное, оказались бы совершенно не способны к освоению математики в любой ее форме. Конечно же, мощность

[5]Steven Pinker «The Language Instinct. How the Mind Creates Language», HarperPerennial, 1994.

нашего математического интеллекта намного слабее, чем языкового. Тем не менее, вполне осмыслен вопрос: а можно ли учить детей математике так же, как мы учим их родному языку? Что бы это означало на практике?

Так называемую «метафору полноценного языка» развивает в теории и на своих занятиях канадский математик и информатик Майкл Феллоуз (Michael Fellows) и его сотрудники — в первую очередь Нэнси Кэйзи (Nancy Casey). Вот некоторые из их принципов в моем вольном пересказе:

- Детям полезно сталкиваться с богатым и разнообразным математическим содержанием. Не обязательно излагать материал в строгой иерархической последовательности, а вопрос о «соответствии уровню развития» следует рассматривать в широком контексте.

- Ученики продвигаются вперед, сталкиваясь с материалом, который они уже в состоянии понять, но еще не способны воспроизвести.

- Навыки и умения безусловно важны, но развивать их следует в процессе какой-то осмысленной деятельности. Лучше всего служат этой цели выбранные самими детьми и стимулирующие их любознательность проекты.

- Детей следует поддерживать в том, чтобы они выбирали проекты самостоятельно.

- Взаимодействие и обмен мнениями между детьми не только важны, но абсолютно необходимы. Учитель должен не запрещать эти контакты, а, наоборот, всячески поддерживать их.

- Нужно давать ученикам достаточное время для того, чтобы они могли читать, обдумывать, разговаривать друг с другом, делиться идеями, спорить, а также излагать свои мысли в письменной форме. Класс должен представлять собой слепок научного сообщества, в которое мы вводим детей.

- Учитель является не послом этого сообщества и не сторонним наблюдателем. Он должен быть соучастником происходящего, «практиком науки».

Феллоуз занимался с детьми 5—9 лет. Вот список (думаю, что очень неполный) тех сюжетов, которые он затрагивал на своих занятиях: раскраска карт и графов; поиск остовных деревьев минимального веса в графах; теория узлов; сортирующие сети; доминирующие множества вершин в графах;

построение графов заданной степени и диаметра; наконец, великое множество задач, связанных с криптографией. Но читатель уже понял: главное — не то, *что* изучается, а то, *как* это делается. Не выслушивание определений, теорем и доказательств, не серии однообразных упражнений, а экспериментирование с реальными графами, картами и узлами, обмен гипотезами, недопонимание и уточнение вопросов, соревнование и поиск наилучших решений и т. п. В одной из статей Феллоуз с гордостью приводит список из четырех исследовательских проблем, которые родились в результате обсуждений с детьми и которые впоследствии привели к нескольким научным публикациям — иногда его собственным, иногда — его коллег, с которыми он обсуждал проблему.

Теоремы и доказательства тоже отнюдь не противопоказаны; но они воспринимаются гораздо лучше, если отвечают на *вопрос, заданный детьми*. Несколько дальше (стр. 269) я упоминаю задачу о «косых квадратах», которая сама естественным образом выводит на теорему Пифагора. Но эту теорему мы стали доказывать только тогда, когда получили от нашей аудитории вопрос: «А что, *так всегда, что ли, будет*?»

«Вы считаете, что детям действительно необходимо знакомство с теорией узлов?» — спрашивали у авторов концепции. «А вы считаете, что детям действительно необходимо знать в деталях все приключения Гекльберри Финна?» — спрашивали те в ответ. Видимо, нет. Детям необходимо: (а) читать; и (б) чтобы история, которую они читают, была увлекательной. Какая конкретно это будет история — вопрос вторичный.

Характерно, что Феллоуз, сам будучи информатиком (что по-английски звучит как computer scientist), весьма скептически, чтобы не сказать враждебно, относится к использованию компьютеров в школьном образовании. Я сам считаю, что компьютеры вовсе не вредны, если рассматривать их как один из возможных инструментов исследования. Но поскольку они являются универсальным средством для всего на свете, то и ловушек и ложных путей предлагают гораздо больше. А уж более дебильное занятие, чем компьютерные игры, и придумать трудно. В Московском детском компьютерном клубе, где я был одним из преподавателей, компьютерные игры были категорически запрещены, а у входа мы торжественно вывесили статью закона, запрещающего «содержание публичных домов и игорных притонов».

Глава 6.

Кружок с мальчиками — третий год

Петя с Женей пошли в школу, и наши занятия переехали с утреннего времени на вечернее.

Занятие 55. Логические задачи

18 октября 1982 (понедельник) $16^{30} - 17^{30}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Открытие учебного года: мы с Димой подарили Пете и Жене по комплекту фломастеров и открытку «Поздравляем с началом учебного года».

Задание 1. Сказка. Я рассказал детям сказку об очень умном юноше, которого полюбила прекрасная принцесса. Чтобы принцесса не вышла за него замуж, король решил казнить юношу. Но, вняв мольбам принцессы, он объявил: «Ты будешь тащить жребий. Я положу в эту чашу две бумажки; на одной будет написано ЖИЗНЬ, а на другой СМЕРТЬ. Какую бумажку ты вытащишь, так и решится твоя судьба». Однако в душе король задумал коварство: он велел своему министру написать на обеих бумажках одно и то же слово СМЕРТЬ. Принцесса подслушала их разговор и сумела предупредить юношу.

«Как вы думаете, ребята, — спросил я, — что должен сделать юноша?»

В ответ мальчики лишь пожимали плечами. Потом Дима предложил: «Он мог сказать, что там неправильные бумажки». Я объяснил последствия такого действия (ему всё равно в одном случае из двух грозит смерть).

[Надо было добавить, что и принцессу могли сильно наказать, а он ее любил и не хотел этого.]

Тогда я продолжал триумфальным голосом: «Но я ведь вам сказал, что это был очень умный юноша! Он сказал: "Я вытаскиваю вот эту бумажку!", — и с этими словами достал одну бумажку... — и съел!»

Мальчики смотрели на меня широко раскрыв глаза: как же это можно — съесть бумагу? Они явно не понимали, к чему идет дело. Я продолжал повествовать:

«Тогда все закричали: "Но как же мы теперь узнаем, что было написано на той бумажке, которую ты съел?" А юноша улыбнулся и ответил: "Но ведь осталась вторая бумажка! Можно посмотреть, что написано на ней!" Посмотрели — а на ней написано СМЕРТЬ. Значит, на той, что вытащил юноша, должно было быть написано ЖИЗНЬ. Королю было стыдно признаваться в своем коварстве — и юноша был спасен!»

◁ Мне это решение не показалось лучше тех, которые предлагали мы. — Дима. ▷

Такой поворот дел произвел на ребят сильное впечатление: они долго смотрели на меня круглыми глазами. (А вечером Петя задавал эту задачу родителям).

Задание 2. Перепутанные надписи.

В трех коробочках лежат спички, кнопки и скрепки. На них имеются также надписи: СПИЧКИ, КНОПКИ и СКРЕПКИ. Но ни одна из надписей не соответствует содержимому. Разрешается открыть всего одну коробку, и при этом требуется узнать содержимое всех трех коробок.

Сначала, так же, как и в предыдущем задании, дети лишь вяло пожимали плечами. Вообще по всему видно, что они за лето совершенно разучились шевелить мозгами. Как-то мне всё-таки удалось разбудить их активность, и в итоге Женя первый решил задачу, хотя и не очень толково объяснил. После этого я, меняя по-разному содержимое и расположение коробок, задал ту же задачу 6 раз (по два раза каждому).

Вечером Дима целый час занимался тем, что корябал какие-то надписи на коробках — придумывал задачу для меня. В итоге родилось нечто даже занятное. В коробках лежали: в одной — кнопки и скрепки, в другой — кнопки и спички, в третьей — скрепки и спички. Надписи же были такие: КНОПКИ И СКРЕПКИ, опять КНОПКИ И СКРЕПКИ, и КНОПКИ И СПИЧКИ. Дальше условие то же: все надписи неправильные, и заглядывать разрешается лишь в одну коробку. Специфика этой задачи в том, что набор «кнопки и скрепки» может лежать только в коробке с надписью КНОПКИ

И СПИЧКИ, так как в двух других коробках он лежать не может. Так что в эту коробку и заглядывать нет смысла, про нее всё известно заранее, а заглядывать нужно в одну из двух коробок с одинаковыми надписями. В моей задаче все коробки были равноправны: ни про какую из них ее содержание не было известно заранее, но и заглядывать можно было в любую. Может быть, дать эту задачу детям на следующем занятии?

Задание 3. Подобие.

Каждый получил лист клетчатой бумаги и карандаш. Я рисовал им разные фигурки на бумаге, а они должны были нарисовать фигурку вдвое бóльшую — как на рис. 6.1.

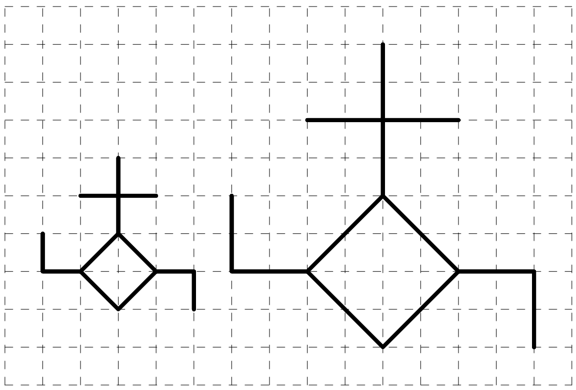


Рис. 6.1. Гомотетия на клетчатой бумаге

Дима справился со всеми заданиями без ошибок, только иногда его фигурки (удвоенные) налезали на мои исходные, так как он не мог рассчитать необходимое место. Женя тоже с этой задачей справлялся неплохо — хоть и делал ошибки, но когда я ему их показывал, он их сам исправлял. А у Пети эта задача почему-то совсем не пошла: он всё делал неверно, указанные мной ошибки сам исправить не мог. Я ему объяснял, как делать, и даже Наташа ему помогала, но без особого успеха.

В следующий раз договорились эту задачу продолжить.

Задание 4. Игра в 15.

Я подробно и обстоятельно объяснил правила игры, после чего раздал ребятам три игры с одинаковым начальным условием и устроил нечто вроде соревнования (хотя ребятам сказал, чтобы они не спешили обгонять друг друга). Всем троим я слегка помогал в трудные моменты.

Игра в 15 — классическая математическая головоломка, изобретенная Сэмом Лойдом в 70-х годах XIX века. На квадратном поле размера 4×4 расположены 15 квадратных плашек с написанными на них числами от 1 до 15. Одно поле остается пустым. Разрешается передвигать на пустое поле любую из соседних плашек. Цель игры — перевести все плашки в стандартное положение (рис. 6.2). Нужно иметь в виду, что цель игры достижима ровно для половины начальных позиций; для другой половины сделать это невозможно.

9	3	7	8
1		11	14
12	10	2	15
6	13	5	4

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 6.2. Передвигая плашки по одной, перевести начальную позицию в конечную.

Первым закончил Петя, вторым Женя. Дима работал хорошо, но он с самого начала невнимательно вгляделся в то, какая позиция является целью. Он первым выстроил строку, но когда я посмотрел на его игру, то увидел, что эта строка стоит не вверху, а внизу:

1	2	3	4

Я еще раз объяснил ему условие задачи и через некоторое время обнаружил вот такую «змейку»:

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12

Пришлось ему еще раз переделывать свое решение. От моей помощи он отказался и закончил всё тогда, когда Женя с Петей уже ушли домой.

Занятие 56. Директор строительства

1 ноября 1982 (понедельник) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устные вопросы.

(1) Диме, Пете и Жене дали два мяча и лопату. Что у кого было, если у Димы и Жени были одинаковые предметы?

(2) Тем же дали два карандаша и авторучку, причем у Димы и Пети были разные предметы.

(3) Нам четверым дали три машины и барабан, причем у Димы и Пети были одинаковые предметы, а у Пети и Жени — разные.

(Во втором случае ответ неоднозначный.)

Задание 2. Димина задача.

Дал задачу, придуманную Димой — см. предыдущее занятие, п. 2. Пошла довольно плохо, так как никто из детей не мог толком запомнить всех трех комбинаций по два предмета.

Задание 3. Удвоение фигуры (гомотетия).

Петя наконец освоил гомотетию и к концу удваивал довольно сложные фигурки совсем без ошибок. Дима, наоборот, сначала совсем не делал ошибок, а потом стал работать неаккуратно, так что нельзя было разобрать, есть в его рисунке ошибки или нет. Женя, как и в прошлый раз, в целом выполнял задание хорошо, хотя иногда и ошибался.

Ребятам очень нравилось задание, и они не хотели его прекращать, вынудив меня дать каждому на две фигурки больше, чем я намеревался.

Задание 4. Сетевые графики.

Не знаю, как правильно назвать это задание. Термин «сетевые графики» заимствован из теории исследования операций; однако в появившемся позже учебнике «Алгоритмика» (ссылка имеется на стр. 19) мы соответствующую главу назвали «Параллельное программирование». В самом деле, ведь речь здесь идет о «работах», которые иногда можно исполнять параллельно. Класс задач о «директоре строительства» (еще одно название) оказался необычайно богат разнообразными идеями; в этом дневнике из них используется лишь малая часть.

Я взял несколько предметов из Диминого деревянного конструктора и на каждом фломастером написал номер. Каждый из мальчиков был назначен директором строительства. Сначала мы построили очень простой объект (рис. 6.3).

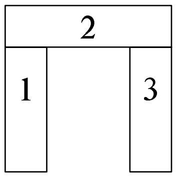


Рис. 6.3. В каком порядке можно устанавливать части этой конструкции?

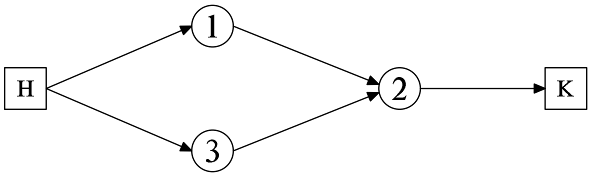


Рис. 6.4. «Сетевой график» исполнения работ при строительстве конструкции, показанной на рис. 6.3. Буквы Н и К означают «начало» и «конец».

Мы подробно обсудили, в каком порядке можно ставить детали, и в итоге изобразили этот порядок в виде схемы, показанной на рис. 6.4. (На более ученом языке речь идет о *частичном порядке* и о его возможных линейных продолжениях.) Надо сказать, что *вопрос* о порядке работ был детям вполне понятен, а вот позаимствованная мной из теории исследования операций *форма представления ответа* в виде ориентированного графа оказалась не очень удачной. Это надо обдумать.

Я подробно объяснил ребятам смысл параллельности работ 1 и 3 (их можно строить в любом порядке независимо друг от друга, а можно и одновременно, если есть две бригады; зато работу 2 можно делать только после того, как закончены работы 1 и 3). Каждый из мальчиков получил лист бумаги и фломастер. Дальнейшая работа происходила так: я строил сооружение, ребята самостоятельно рисовали графики, потом мы каждый график обсуждали, после чего рисовался окончательный проект. Сооружения, использованные в данном занятии, а также соответствующие сетевые графики, показаны на рис. 6.5.

Замечание. Приведенные здесь рисунки весьма условны: сохранена только схема, а номера блоков, их размеры и т. п. не соответствуют реальным. Но главное то, что в нашем деревянном конструкторе имеются детали разной формы — треугольные призмы, цилиндры, полуцилиндры... Так что реальные сооружения были более красивы, чем на рисунке.

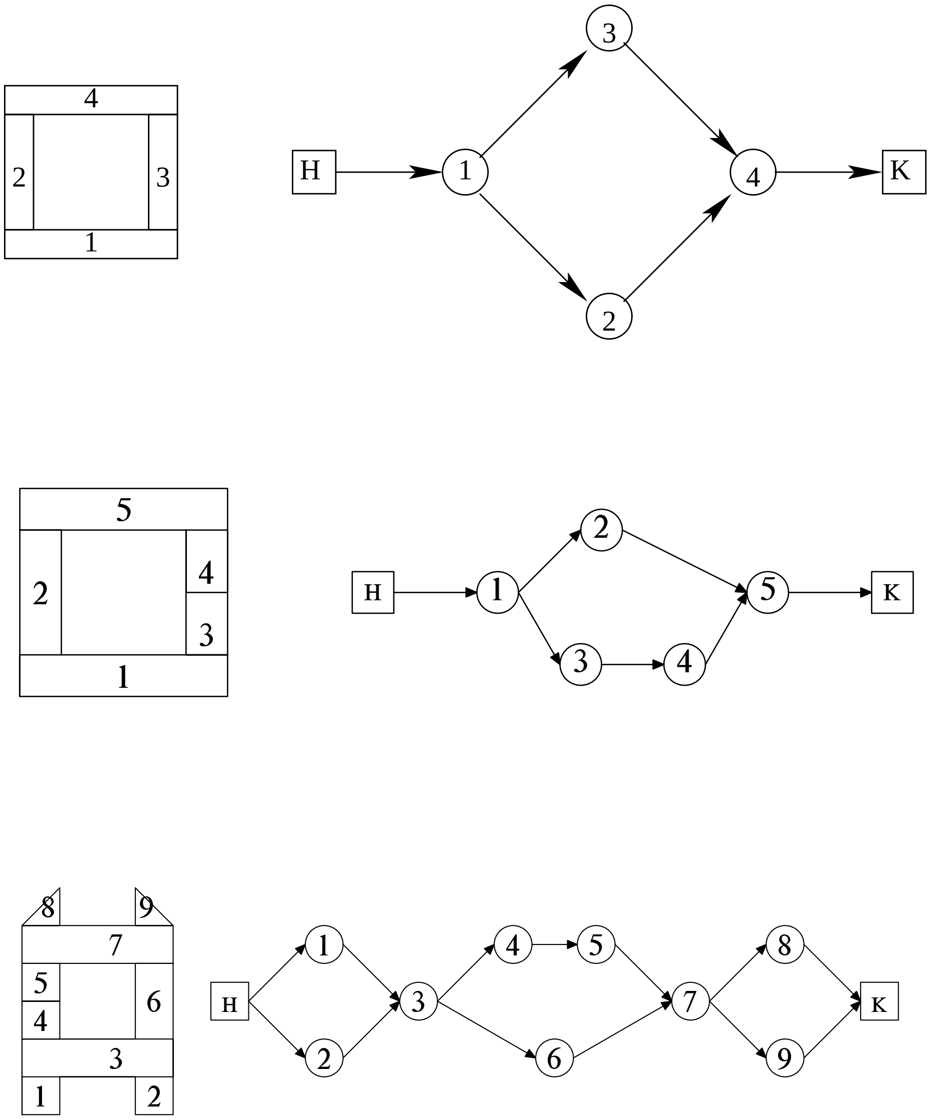


Рис. 6.5. Три конструкции и соответствующие им планы строительства.

Занятие 57. Кто бутее, Гобр или Ступ?

15 ноября 1982 (понедельник) 17^{30} – 18^{30} (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устные вопросы на транзитивность.

(1) Коля бутее, чем Вася, а Вася бутее, чем Таня. Кто бутее всех? Ответил правильно Дима, но и он, и остальные мальчики долго приставали ко мне, что значит «бутее».

(2) Гобр согже, чем Вурм, а Вурм согже, чем Ступ. Кто согже всех? Тоже ответил Дима.

◁ Мне пришлось несколько раз переспросить, чтобы запомнить все имена и слово «согже». — Дима. ▷

(3) Толя сильнее, чем Миша. Миша младше, чем Вова. Вова ниже, чем Толя. Толя старше, чем Вова. Вова слабее, чем Миша. Миша выше, чем Толя. Кто из ребят самый сильный, кто самый старший и кто самый высокий?

Мы написали на трех бумажках инициалы трех мальчиков: Т, М и В, и для каждого отдельного признака стали их раскладывать в порядке убывания этого признака. Я каждый раз читал весь текст целиком, а ребята должны были сами выбирать из моих фраз те, что относятся к делу.

Дима с задачей совершенно не справлялся: каждый раз забывал, какой именно признак мы сейчас упорядочиваем. В основном задачу вел Петя, остальные двое только сбивали.

Задание 2. Фигурки на клетчатой бумаге.

Сначала я дал, как и раньше, одну фигурку удвоить; все легко с этим справились. Тогда я велел ту же фигурку утроить. Дима справился с утроением так же легко, что и с удвоением. Женя допустил пару ошибок, но легко исправимых. Петя же, к моему удивлению, совершенно ничего не смог сделать. Это особенно странно потому, что удвоение он выполнял быстрее и лучше других.

Это трудно сформулировать, но, видимо, дети как-то по-разному обучаются решать задачи. Похоже на то, что в данном случае Дима сумел понять логическую структуру задачи, а Петя вместо этого усвоил некую механическую последовательность действий, которая приводит к успеху, никак ее не осмысляя. Более точно выразить мысль не могу. Я помню, однако, по своим школьным годам: я очень плохо понимал физику (и сейчас плохо ее понимаю), но каким-то «чутьем отличника» угадывал, что и как нужно написать в контрольной, чтобы получить пятерку.

Дальше я задал ребятам ту же фигурку положить на левый бок, положить на правый бок, затем вверх ногами. Потом было еще одно задание:

я нарисовал несимметричную фигурку и велел сначала отразить ее в горизонтальном зеркале, а потом нарисовать вверх ногами — и сравнить результаты. Задача, как и следовало ожидать, далась не очень легко: мальчики не понимали, в чём разница между этими двумя действиями. После моих подсказок Дима первый справился с задачей, а остальные у него срисовали, но тоже всё поняли.

Немножко неудобно мне здесь чаще других хвалить Диму, но он и в самом деле занимается успешнее Пети и Жени (чего совершенно не скажешь, например, о кружке рисования или о занятиях английским).

Задание 3. Сетевые графики.

Башня, которую требовалось построить, схематически изображена на рис. 6.6. Фактически детали номер 16 и 9 лежали под прямым углом к 8, образуя вместе букву П; кроме того, некоторые из деталей были не параллелепипедами, а цилиндрами.

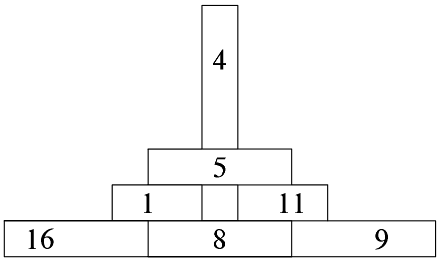


Рис. 6.6. Разработать «план строительства» вот такой башни.

Все мальчики нарисовали схемы *допустимые*, т. е. не противоречащие логике расположения фигурок, но только Дима нарисовал схему оптимальную. Все три схемы показаны на рис. 6.7. Фактически изображения были несколько иными — из-за неудачного расположения цифр на рисунке, из-за не очень ясного рисунка, и, наконец, самое главное, из-за того, что не всегда дети умеют выразить рисунком логическое отношение. Приведенные рисунки появились после моего обсуждения с ребятами того, что нарисовали они. Следует обратить внимание на то, что Женино решение требовало пересечения стрелок графа друг с другом; он не решился сделать такие пересечения, из-за чего получил неверный рисунок; однако устно он всё объяснил правильно и потом согласился с моим рисунком. Диму же пересечения не смутили, и он нарисовал логически безупречную схему с пересекающимися стрелками. Только потом я ему подсказал, как расположить кружочки с цифрами, чтобы избежать пересечений. Характерна также позиция Пети:

он понимал, что предложил не наилучшее решение, но думать более напряженно ему, видимо, не хотелось. Зато он лучше других понимал «модальную логику» ситуации: по его схеме построить башню *можно* (схема не противоречит расположению фигурок), и поэтому он как «директор строительства» может приказать строить ее так, а не иначе. Так он свою позицию и сформулировал.

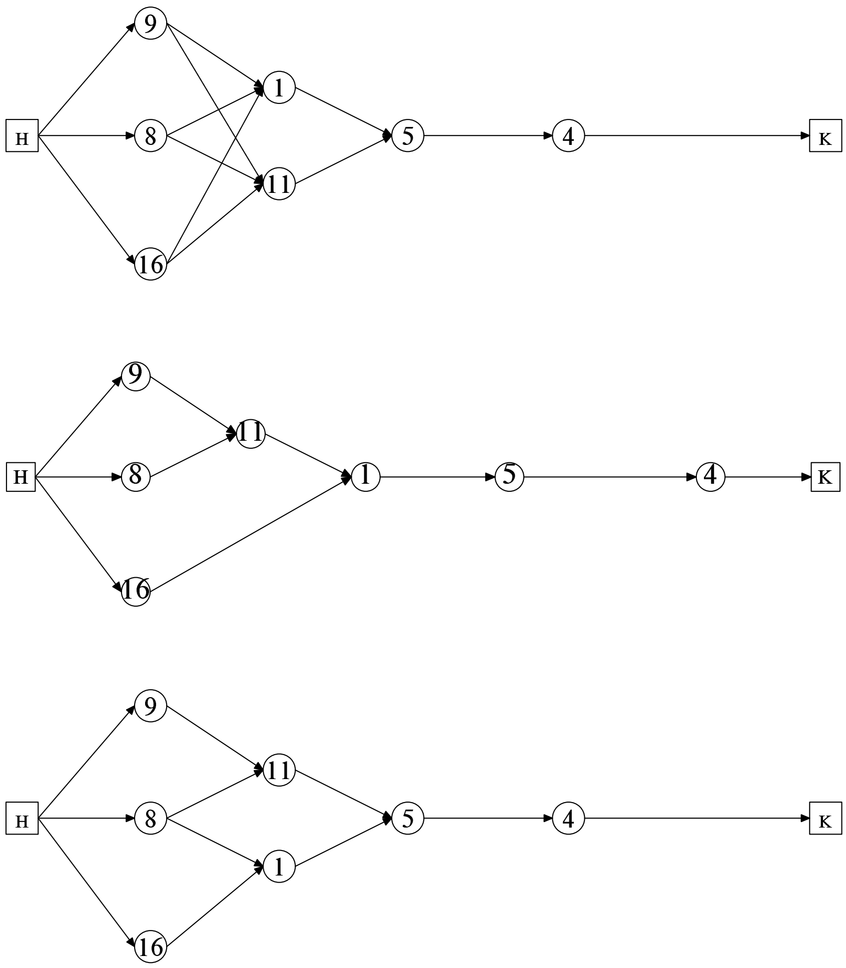


Рис. 6.7. Первая схема принадлежит Жене, вторая — Пете, третья — Диме.

Успеху Димы отчасти способствовало также то, что где-то посреди недели он по собственной инициативе построил какое-то строение и рисовал его схему.

Спирограф. Уже после окончания кружка мы увлеклись игрой «спирограф», которую принесла Наташа, и долго рисовали с ее помощью разные эпи- и гипоциклоиды. Интересное предложение выдвинул Дима: катать не маленькое колесико вокруг большого, как это делали все, а большое вокруг маленького.

Спирограф — это набор зубчатых колесиков и колец разного диаметра. Их можно катать друг вокруг друга, а маленькие колесики можно также катать внутри больших колец. На разных расстояниях от центра в колесиках проделаны отверстия. В них можно вставлять карандаш и, закрепляя одно колесико и катая вокруг него другое, рисовать разные занимательные кривые.

Занятие 58. План комнаты

22 ноября 1982 (понедельник) $17^{15} - 12^{00}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устные вопросы.

Заменить одним словом выражение «сделать так, чтобы был...». Например: сделать так, чтобы был дом = построить дом. Другие примеры:

дерево	—	посадить	свет	—	зажечь
книга	—	написать	суп	—	сварить
картина	—	нарисовать	порядок	—	навести
задача	—	придумать	яма	—	выкопать

Потом я предложил ребятам самим придумать примеры. Дима тут же выдал: «Сделать так, чтобы была рыба». И, увидев мой недоуменный взгляд, сам ответил: «Я имел в виду — родить». Дальше примеры перешли в еще более опасную область. Петя сказал: «Сделать так, чтобы был ребенок». Я поспешил сам решить эту задачу: «Тоже родить», — и перевел разговор в другую плоскость.

Задание 2. Пентамино.

Задание состояло в том, чтобы сложить заданную фигуру из двух фигурок пентамино. Было сложено шесть фигурок, еще две я показал сам.

Двенадцать фигурок пентамино показаны на рис. 6.8. Каждая из них состоит из пяти клеток. Задание, как правило, состоит в том, чтобы построить из них заданную фигуру (причем ее разбиение на фигурки из набора не сообщается). Уровень таких задач варьируется от легких до необычайно трудных. В частности, выгрузив фигурки из прямоугольной коробки (встречаются коробки двух типов: 5×12 и 6×10), не так-то просто уложить их обратно.

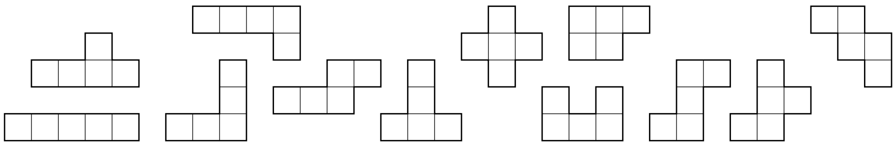


Рис. 6.8. Набор фигурок пентамино.

Из рисунка видно, что не все фигурки обладают осевой симметрией. Их, однако, разрешается переворачивать вверх ногами, и таким образом получать вместо одной фигурки другую, ей симметричную (рис. 6.9).

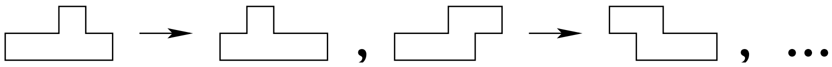


Рис. 6.9. Перевернув плашку вверх ногами, получаем ей симметричную. Поэтому при построении сложных фигур из пентамино можно использовать любую из них (но только одну).

Задание 3. План комнаты.

Каждый из ребят получил «комнату» — нарисованный на листе бумаги прямоугольник с «дверью». Кроме того, каждый получил вырезанные из перфокарт диван, секретер, пианино, стол, книжные полки и т. п. Все эти предметы надо было разместить в «комнате»-прямоугольнике так же, как они стоят в нашей реальной комнате. Ребята справились с заданием так быстро и легко, что мне пришлось на ходу придумывать им другое задание.

Я принес каждому по листу бумаги и по фломастеру и попросил теперь план комнаты нарисовать. Трудно определить, справились они с заданием или нет: расположение предметов соответствовало истинному, но масштаб не соблюдался самым чудовищным образом, особенно у Димы, у которого пианино вышло меньше книжной полки. Вообще он работал очень небрежно, всё рисовал кривое, а на замечания реагировал смехом.

В заключение я показал Пете и Жене японский волчок, который вскакивает на ножку (он показан на рис. 6.10).

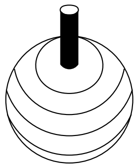


Рис. 6.10. «Японский волчок». Здесь он показан неподвижным; а если его закрутить, он вскочит на ножку.

После занятия, когда все ушли, я показал Диме книгу С. В. Голомба «Полимино», и, в частности, показал три фигуры, про которые до сих пор неизвестно, можно ли их сложить из пентамино. Дима, не раздумывая, сказал: «Сейчас попробую», — и принялся их складывать. Потом он придумывал для меня задачи — складывал разные совершенно несимметричные фигуры (просил меня не подглядывать) и аккуратно их зарисовывал на клетчатой бумаге.

Долгая пауза

На этом месте в наших занятиях наступил перерыв более, чем на два месяца. Сначала у Димы была операция; потом он болел ветрянкой; потом Женя (наша) болела ветрянкой; потом наступил Новый год; потом мальчики ходили в театр Образцова и на разные елки, что заняло еще два понедельника. Когда же, наконец, можно было начинать снова заниматься, я с ужасом обнаружил, что сошел с накатанной колеи и вообще забыл, чем мы занимались и что такое наш кружок. В результате я за обычное время не успел подготовиться к занятию и вынужден был сам перенести его еще на неделю. Отсюда я извлек тот урок, что следует не давать себе поблажек и передышек и проводить занятия каждую неделю без пропусков, хотя бы даже на них было по два, а то и по одному человеку. Этому пониманию в особенности способствовало то, что заболела ветрянкой Саня (младшая сестра Пети), так что Петя попал в карантин, а потом еще, может быть, заболеет и он сам... Так или иначе, Петино присутствие откладывается еще минимум на месяц.

Дима за это время не стоял на месте. Особенно много во время болезни он занимался пентамино и «пифагором».

Головоломка «пифагор» имеет множество версий и множество названий (часто ее можно встретить под именем «танграм»). Квадрат либо прямоугольник разрезается на несколько частей, и потом из этих частей предлагается складывать разнообразные фигуры. На рис. 6.11 показан тот вариант, который был у нас.

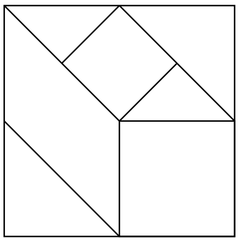


Рис. 6.11. Головоломка «пифагор»: квадрат разрезан на семь частей, и из этих частей надо складывать разные фигуры.

По своему обыкновению, он не решал задачи, а придумывал. Но я применил неожиданный ход, который только сейчас осознал как ход (сейчас, когда пишу). Я ему стал подсказывать, какую задачу можно было бы придумать. Например: «А попробуй придумать задачу, в которой надо было бы сложить из пентамино квадрат 5×5». — «Как это?» Я объяснял, и он охотно «придумывал» такую задачу, не догадываясь, что на самом деле он ее решает.

◁ Я это понимал так, что я (с папиной помощью) придумываю задачи кому-то другому. — Дима. ▷

Таким образом, он построил, в частности, серию прямоугольников 3×5, 4×5, 5×5, 5×6, 5×7, но продолжать дальше ему надоело. Некоторые из его построений показаны на рис. 6.12—6.15.

После этого наступил трудный педагогический момент: Дима твердо вознамерился свои задачи опубликовать.

◁ Иначе непонятно, для кого же я их придумывал. — Дима. ▷

Я пытался как-то его отговорить, но всё звучало очень неубедительно, так как главный аргумент (это никому не интересно) я произнести не мог. Я пытался также выяснить, почему ему так этого хочется, но однозначно ясных причин не установил. Тщеславие тут, конечно, немножко присутствует, но в какой-то неясной для меня форме. Я спросил: «Тебе хочется, чтобы тебя хвалили за то, что твои задачи напечатали?» Он ответил: «Но как же они могут меня хвалить? Ведь они меня не знают» (т. е. не знакомы лично).

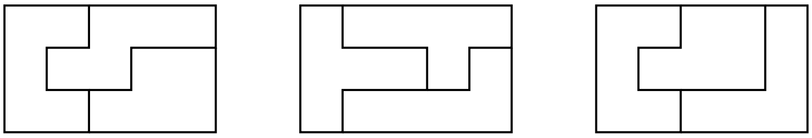


Рис. 6.12. Три способа построить из пентамино прямоугольник 3×5.

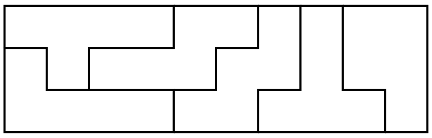


Рис. 6.13. Прямоугольник 3×10. Заметьте, что он вовсе не составлен из двух прямоугольников 3×5, показанных на предыдущем рисунке — такое решение было бы слишком легким.

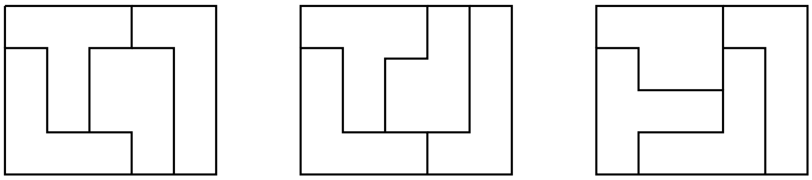


Рис. 6.14. Три прямоугольника 4×5. Приложив к любому из них полоску 1×5, можно сделать квадрат 5×5.

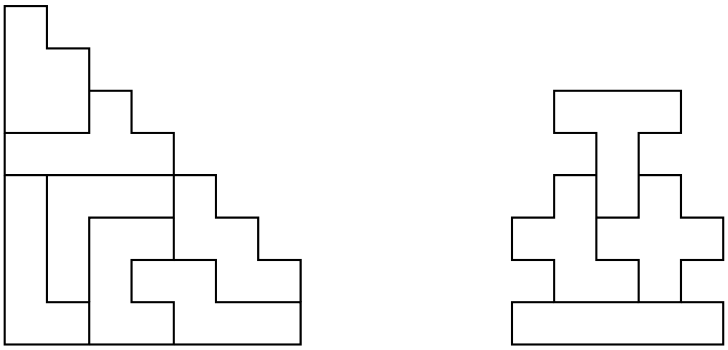


Рис. 6.15. Пара более экзотических фигурок.

Видимо, им руководили примерно такие соображения, что вот, мол, работа проделана, и теперь она пропадет зазря, и кому-то придется потом проделывать то же самое. Кроме того, по-видимому, публикация представляется ему делом простым и обыденным. В самом деле — на полках стоят книги, написанные дедушкой, мамины и папины переводы, книги Петиных родителей, книги Миши Шубина[1] и т. п. — всё это люди, живущие в том же доме, с детьми которых он гуляет во дворе, занимается рисованием и проч. Может быть, ему так представляется, что обыденная жизнь всех людей из этого и состоит: люди чистят зубы, стелют постель, публикуют книги, гуляют с детьми, стирают белье — всё в одном ряду.

◁ Тут папа меня переоценил. Я тогда и понятия не имел обо всех этих книгах. Тем не менее я не видел никаких трудностей в публикации. — Дима. [Это не совсем точно. Я хорошо помню, как Дима показывал Алле одну из книг на полке и говорил: «Мама, тут почему-то твоя фамилия написана». Это была монография Диминого дедушки, Виктора Ноевича Ярхо, об Эсхиле. Видимо, Дима тогда не придал этому значения, а потом забыл. — А. З.] ▷

Забавно осознавать, насколько кардинально это отличается от моего детства. Для меня тогда писатели существовали в какой-то другой Вселенной, не имеющей контактов с нашей. Как-то раз на заводе в Витебске, где работала моя мама, была организована встреча с каким-то третьеразрядным писателем. В конце встречи он раздавал автографы. Мама подошла к нему и попросила подписать книжку для меня: «Мой сын — отличник». Вечером она принесла домой книжку с надписью: «Отличнику Саше Звонкину от автора». Я не мог поверить своим глазам. Настоящий писатель — и мне. . . !

В конце концов я объяснил Диме, что бывают родители, которые любят хвастаться своими детьми, и я не хочу, чтобы про меня так подумали, а посему вот тебе журнал «Квант», и если ты найдешь в нём адрес, то и пиши на здоровье, а я тебе ни в чём помогать не буду. Прием дешевый, но успешный. А́дреса он, конечно, не нашел, но зато перелистал внимательно весь журнал, прочитал все заголовки, о многих меня расспросил и потом даже Алле говорил, какой интересный журнал.

Потом он занялся «пифагором» и тоже придумал парочку неплохих задач: они показаны на рис. 6.16—6.18. Про две похожих друг на друга фигурки рис. 6.17 он решил, что они одинаковы, но на самом деле это не так. К набору прилагался вкладыш с приблизительно сотней фигур-задач, которые требовалось сложить. В основном это были зайчики, петушки да бычки, но некоторые из них вполне имели вид геометрических фигур, как у нас. Я

[1] Наш близкий друг, математик. Ныне — профессор одного из американских университетов.

стал искать Димины фигуры на вкладыше, но обнаружил только похожую на них фигуру № 87, которая при ближайшей проверке оказалась вообще невозможной. (Две фигурки из «пифагора» представляют собой маленькие треугольники; остальные можно разрезать либо на 2, либо на 4 таких же треугольника; всего таких треугольников получится 16 штук; фигура же № 87 требует 19 таких треугольников.) Этот вопрос мы с Димой обсудили.

◁ Я, по-моему не понял. — Дима. [Ну естественно! Ведь мое объяснение требует понимания закона сохранения площади. Я так долго и упорно настаивал на том, что этого понимания пока нет, а как дошло до дела — т. е. до необходимости его «применения» — так обо всём и забыл. — А. З.] ▷

Еще из его успехов можно упомянуть, что, когда мы были в гостях у одного знакомого, он успешно разделил (в уме, разумеется) 31 на 4, получив $7\frac{3}{4}$. Забавно, что обращаться с дробями, имеющими в знаменателе степень двойки, ему помогают ноты, он сам это признавал.

И еще была очень смешная его попытка оценить количество возможных «алфавитов», т. е. перестановок из 33 букв; в его рассуждениях проявились какие-то зачатки комбинаторного мышления. Он считал, что букв 33 и мест 33, поэтому эти числа надо перемножить (перемножил он их неправильно). Но потом еще вспомнил, что для второй буквы есть всего 32 возможности, и потому из произведения вычел единицу. Позже я объяснил ему про $n!$, а когда мы были у меня на работе, то даже стали вычислять 33! на калькуляторе «Искра», но добрались только до 18!, а дальше машинку зашкалило.

Кстати (всё время вспоминаю что-то еще), в день елки для детей у нас на работе я устроил Диме и еще одному мальчику чуть постарше небольшую экскурсию в наш ВЦ, а потом ребята еще набили по одной перфокарте на перфораторе.

Занятие 59. Что видит другой

31 января 1983 (понедельник) $16^{00} - 17^{00}$ (1 час)
(Дима, Женя)

Задание 1. Устные вопросы.

Килограмм мяса варится два часа. Сколько будет вариться полкилограмма такого же мяса?

Дима: «Час». — «Почему?» — «То есть нет, тоже два часа». — «А ты, Женя, как думаешь?»

Дима продолжает: «Я не знаю, может быть, всё-таки меньше, чем два часа. Потому что тепло быстрее проходит. Ведь его не разреза́ли?» — «А если разрезали?» — «Тогда одинаково».

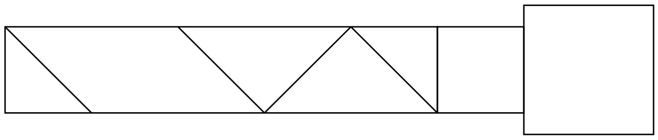


Рис. 6.16. Фигурка, сделанная из набора «пифагор».

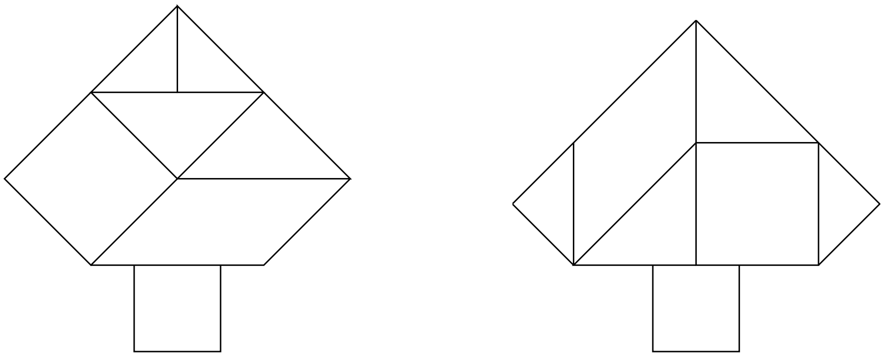


Рис. 6.17. Эти фигуры кажутся одинаковыми, но на самом деле правая чуть шире, чем левая.

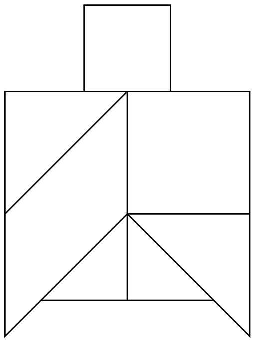


Рис. 6.18. Еще одна Димина задача для «пифагора».

К этому времени Женя проснулся и до него тоже дошло условие задачи. Он говорит: «Час». — «Почему?» — Молчание.

«Ну хорошо, — говорю я, обращаясь к Жене. — Одна сосиска варится две минуты; сколько времени варится пять сосисок?» Женя (немного подумав): «Пять». — «Почему пять?» — «Но ведь сосисок больше!» — «Во сколько раз больше?» — «. . . В три. . . » Начинаем восстанавливать условие задачи; вскоре с некоторым трудом Женя приходит к ответу «10 минут», причем сам объясняет, что варить надо по очереди.

Дима и Наташа наперебой пытаются объяснить ему решение. Он понимает, но как-то без озарения, без этого «Ах, да, ну конечно!. . . », а как-то скучно: «Ну, две так две. . . »

Вообще явно видно мощное отупляющее влияние школы[2]. Наташа сама признаёт, что Женя, пойдя в школу, сильно деградировал; да это видно и из приведенной сцены. А недавно Алла слышала, как Дима говорил Пете: «А знаешь, мне папа рассказал такую смешную историю, как одному человеку надо было пройти 100 километров, а он прошел 99 и сказал: “Ой, что-то далеко туда, пойду-ка я обратно”», — на что Петя ответил: «Ну да, ему ведь обратно 1 километр идти». А Дима закричал: «Ты что! Ему нужно 198 километров пройти!» Нечто аналогичное Аллины родственники рассказывают про нашего племянника Борю. До первого класса он свободно обращался с трехзначными числами, а в начале первого класса легко справился с контрольной за четвертый класс. К концу первого класса он уже владел только однозначными числами. А сейчас, в третьем классе, он уже совершенно разучился думать и, решая задачу, беспокоится лишь о том, к какому из имеющихся шаблонов ее отнести. В скором будущем и нас всё это ждет; я надеюсь на какое-то чудо с Димой (что он *сохранится*), но никаких оснований для такой надежды нет, кроме только моего сильного желания, чтобы это так было.

Пока же на кружке меня ожидают чисто практические трудности. Дима и раньше был слегка впереди Пети и Жени, а теперь он продвинулся вперед, а они — назад.

[2]Я хочу сделать здесь одно важное замечание. В дальнейшем тексте будет еще много инвектив и филиппик в адрес школы. Я не хочу их убирать: именно так я тогда думал и так чувствовал. Однако несколько позже я приобрел собственный — совсем небольшой — опыт работы в школе. Я не хочу сказать, что моя точка зрения кардинально изменилась; но она очень сильно обогатилась большим количеством дополнительных нюансов и более ясного понимания школьных проблем. Проблемы эти столь трудны, что мне сегодня кажется почти чудом тот факт, что школа умудряется решать хотя бы даже небольшую их часть. При этом она в очень большой степени лишена моральной поддержки со стороны общества. От авторов вроде меня учителя не слышат в свой адрес ничего кроме критики. Увы.

Задание 2. Вероятностная игра.

Каждый из нас (я тоже играл) бросал кубик три раза и из полученных очков составлял трехзначное число. Делалось это так: первое выпавшее число становилось на выбор либо числом сотен, либо десятков, либо единиц — т. е. ставилось в одну из трех клеточек небольшой планшетки, показанной на рис. 6.19, второе — в одну из оставшихся клеточек, третье — в последнюю пустую клеточку.

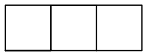


Рис. 6.19. Планшетка для вероятностной игры. Бросают игральный кубик, и выпавшее число ставят в одну из клеток; затем кубик бросают еще раз, и выпавшее число ставят в другую клетку; то же повторяется и в третий раз. Выигрывает тот, чье получившееся в результате трехзначное число окажется наибольшим.

Выигрывал тот, у кого число получалось наибольшим. Дима первый придумал разумную стратегию: бóльшие числа ставить в сотни. Тем не менее, из 9 партий 4 выиграл Женя, 3 — я и 2 — Дима. Женин успех частично объясняется тем, что он не очень аккуратно бросал кубик: держал его низко над столом пятеркой вверх, стараясь, чтобы он не кувыркался (шестеркой вверх то ли не догадался, то ли не решился).

[Хочется заметить, что нахождение настоящей оптимальной стратегии в этой игре — задача далеко не тривиальная; я ее не смог рассчитать даже для двух игроков и для двузначных чисел (двух клеточек). В самом деле, задача, по крайней мере для второго игрока, не сводится к максимизации математического ожидания. Допустим, выпало 5; ставить ли его в первую клетку (десятки) или во вторую (единицы)? Ответ зависит от того, что стоит в 1-й клетке у 1-го игрока. Если там стоит 6, то, ставя 5 в 1-ю клетку, мы хотя и максимизируем свое математическое ожидание, но делаем вероятность выигрыша равной нулю, в то время как поставив ее в другую клетку, мы могли бы еще надеяться, что в следующий раз выпадет 6 и мы выиграем.

А первый игрок — должен ли он максимизировать свое математическое ожидание, или его наилучшим ответом на оптимальную стратегию второго игрока является какая-то другая стратегия? С ростом количества игроков ситуация усложняется еще сильнее.]

Задание 3. Что видит человек, сидящий напротив?

Я посадил Диму и Женю за столом *напротив* друг друга, и, кладя между ними по очереди 5 листов с рисунками, дал такое задание: Дима должен нарисовать то, что видит Женя, а Женя — то, что видит Дима. Картинки, которые я использовал, показаны на рис. 6.20.

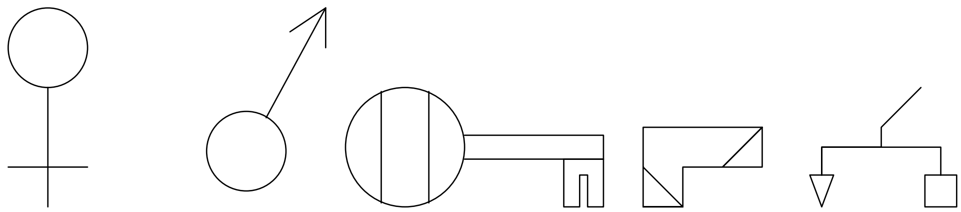


Рис. 6.20. Один из этих рисунков лежит перед вами на столе; вам нужно нарисовать то, что видит человек, сидящий напротив вас.

Мальчики справились с заданием неплохо, по крайней мере лучше, чем я ожидал, хотя, конечно, были и ошибки. Естественно, это задание оказалось труднее другого, дававшегося ранее: нарисовать фигурку вверх ногами. Забавно вот что: Дима один раз схитрил — нарисовал фигурку как видит ее он сам, а потом перевернул лист бумаги. Но даже и это не помогло ему догадаться, что задача эквивалентна переворачиванию фигуры.

Кроме геометрической идеи, содержащейся в этой задаче, в ней имеется еще идея *рефлексии* («что *знает* другой?»). Я давно мечтаю придумать задачи на эту тему, но всё нет идей. Впрочем, сейчас родилась одна мысль: показывать карточки с числами одной стороной к одному игроку, другой к другому. Надо обдумать.

Картинки из книги Глейзера «История математики в школе»[3] — изображение цифр и чисел в разные времена у разных народов.

Я преследовал две цели. Во-первых, одним из моих замыслов, пока плохо осуществляемых, является подчеркивание семиотической функции математики, и, в частности, той идеи, что системы обозначений можно изобретать, что они могут быть разными для одного и того же и что они вообще существуют и важны. А вторая цель — по существу не цель, а так... просто я решил, что надо почаще показывать детям картинки из разных книг, сделав это традицией. Кроме общекультурного интереса, это решает и проблему утомления, которое неизбежно возникает к концу занятия.

[3] Г. И. Глейзер «История математики в школе, IV-VI классы», М.: Просвещение, 1981; то же, VII-VIII классы, 1982; то же, IX-X классы, 1983. Поразительно! Полез на полку за книгами, чтобы дать точную ссылку — а там лежат закладки на тех же местах!

Занятие 60. Рефлексия

7 февраля 1983 (понедельник) $17^{00} - 18^{15}$ (1 час 15 мин.)
(Дима, Женя)

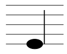
Задание 1. Расстановка стульев.

Лист бумаги — это «комната», фишки — «стулья». Требуется расставить 4 стула так, чтобы у каждой стены стояло по 2 стула. Дима сказал: «А Боря уже решал с нами эту задачу», — и расставил стулья по углам. Я добавил 5-й стул (задание то же — должно быть по два стула у каждой стены). Ребята справились (один стул в углу надо заменить на два стула у двух стен, примыкающих к этому углу). Я добавил 6-й стул; тоже справились. Я добавил 7-й стул. Тут наступила заминка. Решения для пяти и шести стульев они не воспринимали как модификацию предшествующих решений, а как самостоятельные решения отдельных задач. Однако на них продолжала давить идея, что стулья надо ставить в углы. Для 7 стульев лишь один из них надо было поставить в угол; однако мальчики *начинали* с того, что ставили несколько стульев в углы — и вот всё дело стопорилось. После множества неудачных попыток они уж было совсем отчаялись, и я даже уже сказал, что это будет их домашним заданием, но тут Дима сделал последнюю попытку — и справился с задачей.

Тогда я добавил 8-й стул; эта задача тоже было решена (опять Димой). Я предложил еще и 9-й стул; никто не выразил твердого убеждения, что это невозможно, но все согласились, что это, наверное, трудно.

Задание 2. Ребусы.

Ребусы были примитивные, односложные:

(1)	ЛАС .	ласточка;
(2)	100 РОНА	сторона;
(3)	АК 3 СА	актриса;
(4)	Д  3 Й	Дмитрий.

Решение первой задачи я объяснил сам, а остальные три решили ребята.

Задание 3. Вероятностная игра.

Игра та же, что в задании 2 предыдущего занятия, только тот, чье число было самым большим, получал три очка, следующий — два очка, а обладатель самого маленького числа — 1 очко.

Таким образом (хотя детям это было, конечно, всё равно), задача стала проще: каждый мог заботиться только об увеличении собственного числа, без оглядки на остальных. Впрочем, это не так уж очевидно: стратегия должна зависеть от количества очков. Если, например, числа 1, 2 и 3 заменить на 0, 0 и 1000, то игра сведется к предыдущей. В общем, «задача для взрослых» пока остается открытой.

После девяти туров у меня оказалось 21 очко, у Димы 18, у Жени 17. Это означает, что кто-то ошибся в подсчете, так как сумма должна была равняться 54. Но я этого почему-то не заметил. К тому же мальчики чересчур расшалились, так что я торопился перейти к следующей игре.

Задание 4. Игра с рефлексией.

Имеется 12 карточек из непрозрачного картона. На четырех из них написано с одной стороны число 1, с другой 2; еще на четырех — с одной стороны 2, с другой 3; и на оставшихся четырех — с одной стороны 3, с другой 4.

Сначала я показываю ребятам карточки; мы устанавливаем, что на двух сторонах карточки всегда написаны соседние числа, и что самое большое число — 4.

После этого все карточки перемешиваются (и стороны тоже) и кладутся в вертикальную коробку. Мальчики садятся друг напротив друга. Я по очереди вынимаю карточки и показываю их одной стороной Жене, а другой Диме. Каждый из них должен *назвать число, которое видит другой.* (Отыгранную карточку я переворачивал и клал в конец колоды, так что она через 12 ходов возвращалась в игру, но повернутая наоборот, что восстанавливало «справедливость» игры.) В игре очень отчетливо проявились следующие стадии.

1-я: мальчики плохо понимают задачу, называют не чужое число, а свое.

2-я: условие понято. Тот, кто видит у себя 1 или 4, называет противоположное число правильно; но тот, кто видит 2 или 3, пытается угадывать наобум; я велю им говорить «не знаю».

3-я: тот, кто видит 2 (соотв. 3), начинает понимать, что если противник твердо и сразу называет его число, то у него 1 (соотв. 4). Пока еще часты ошибки; я ввожу новое правило: если кто-то ошибся, карта не засчитывается. Число ошибок уменьшается.

4-я: тот, кто видит 2 (соотв. 3), начинает понимать, что если противник говорит «не знаю», значит, у него 3 (соотв. 2). Первый догадался до этого Дима.

5-я: происходит очень смешная сцена. Женя видит 2, а Дима 3. Каждый из них должен был бы сказать «не знаю»; но по опыту предыдущих игр они уже убедились в том, что если поторопиться и сказать первым «не знаю», то противник сразу угадает твое число, в то время как если бы ты потерпел, пока *он* скажет «не знаю», то сам бы угадал его число. Поэтому оба выжидают: каждый желает быть вторым, а не первым. В этот момент вдруг Дима соображает, что если бы у Жени было 4, он бы уже давно всё угадал. А он молчит, и уже давно; значит, выжидает. Тогда Дима твердо заявляет: 2! А Женя, ошибочно истолковав его уверенность, говорит: 1! Наступает долгий смех и прояснение ситуации. Дима сам всё объясняет: «Я вижу, что он (т. е. Женя) сомневается и всё на папу поглядывает. . . »

6-я: у Жени 1, у Димы 2. Женя неожиданно применяет *блеф*: вместо того, чтобы сразу заявить, что у Димы 2, он довольно картинно колеблется и даже, памятуя объяснение Димы, косится на меня. И Дима попадается! Он говорит, что у Жени 3. Буря восторга.

◁ Мне вообще-то казалось, что Женя колеблется как-то неестественно. Но если бы я сказал 1, то могло бы получится, что в прошлый раз я всё сделал правильно, а теперь опять ошибся — это неприятно. Наоборот, когда сделал так же, как и в прошлый раз, только теперь это не сработало, то всё вполне объяснимо. — Дима. ▷

Я понимаю, что теперь уже ребята поняли всю задачу до конца, и пытаюсь остановить игру. Мальчики требуют еще.

После конца занятия, уже повозившись со змеей Рубика, они садятся сами играть в эту игру еще раз. В общем, я этой задачей очень доволен и считаю ее одной из лучших своих находок. Кроме того, я очень рад, что удалось-таки овеществить идею рефлексии (хотя идея гораздо богаче, и наверняка из нее можно извлечь еще множество задач). Но один чисто технический недостаток у этой задачи есть: в нее можно играть только вдвоем.

5. Картинки с многогранниками.

Рассматривали картинки из книги Веннинджера[4], читали названия фигур. Конечно, по сравнению со звездчатыми фигурами обычные правильные многогранники никакого впечатления на ребят не произвели.

6. Змея Рубика.

Я показал ее Наташе и Жене и сложил из нее несколько фигурок, в том числе фигуру № 86 из книги Веннинджера («малый ромбогексаэдр»).

После этого, как я уже говорил, дети уселись сами играть в игру с карточками.

---

[4]М. Веннинджер «Модели многогранников», М.: Мир, 1974. У изображенных в книжке фигур очень смешные названия: малый битригональный додекоикосододекаэдр, большой кубокубооктаэдр, квазиромбокубооктаэдр, большой вывернутый обратнокурносый икосододекаэдр и т. п.

Занятие 61. Как сложить невидимые числа?

14 февраля 1983 (понедельник) $17^{10} - 18^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Женя)

Задание 1. Устные вопросы.

(1) Два отца и два сына поделили между собой три апельсина, да так, что каждому досталось по целому апельсину. Как это могло случиться?

Эту задачу ребята не решили, предлагая в качестве ответа разные глупости. Тогда я задал другой вопрос:

(2) У одного отца 6 сыновей, и у каждого сына есть сестра. Сколько всего детей у отца? Последовал ответ: 12. Трудный момент: я не знаю, что делать в такой ситуации. Я спросил, сколько у отца получилось сыновей и сколько дочерей; оказалось, 6 сыновей и 6 дочерей. «Значит, сколько у каждого сына сестер?» — «Шесть». — «А тогда решите такую задачу: у отца 6 сыновей, и у каждого сына 6 сестер; сколько всего детей?» — «Ой, это совсем много считать надо!»

Я решил попробовать с другого конца. Сначала показал, как получить $4 + 4 = 5$ (взял 4 пальца на одной руке и другие 4 пальца на той же руке). Потом сказал, что 2 умножить на 2 будет 4, а 2 десятка умножить на 2 десятка вовсе не будет 4 десятка. Тут Дима стал считать; сначала сказал, что будет 40 десятков. «То есть, 400?», — спросил я. Но он мне не поверил, что будет 400, стал считать — и насчитал 280! Опять затык. Когда, наконец, досчитали, то уже все забыли, зачем мы это делаем.

Короче, когда мне всё же удалось натолкнуть их на правильное решение первых двух задач, они восприняли их без особого интереса, и всё кончилось к полному взаимному неудовлетворению.

Задание 2. Сумма невидимых чисел (фокус).

В клетках таблицы (в моем конкретном примере таблица имела размер 12×12) стоят разные числа. Я отворачиваюсь, а ребята закрывают плотной непрозрачной полоской 4 соседние клетки по горизонтали или по вертикали. После этого я взглядываю на таблицу и сразу называю сумму спрятанных чисел. Разгадка фокуса в том, что сумма чисел в любых 5 соседних клетках (по горизонтали или по вертикали) всегда одна и та же, в данном случае 20. Поэтому, чтобы найти сумму спрятанных чисел, нужно из 20 вычесть число, стоящее рядом с полоской (слева или справа, если полоска лежит горизонтально, сверху или снизу, если вертикально), рис. 6.21.

Фокус произвел колоссальное впечатление. Ребята вполне были готовы предположить, что я просто запомнил расположение всех чисел, или что я как-то умею проглядывать сквозь полоску, или еще что угодно.

Рис. 6.21. Закрыты четыре клетки; сумма чисел, стоящих в этих клетках, равна 17. Разгадка в том, что сумма чисел в *пяти* соседних клетках всегда равна 20; поэтому, видя, что в пятой клетке стоит 3, мы находим $20 - 3 = 17$.

Дима долго выклянчивал у меня разгадку. Я не говорил. Вечером он уселся изучать таблицу. Еще раньше он заметил, что строки и столбцы периодичны: если сдвинуть их на 5 клеток, то числа повторяются. Пользуясь этим, он научился находить полоску из 4 клеток, параллельную закрытой полоске и содержащую те же числа, и потом их складывал (рис. 6.22). Так что в итоге он научился показывать этот фокус, но только очень медленно.

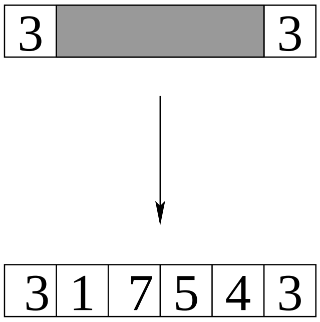


Рис. 6.22. Пользуясь периодичностью таблицы, находим строку, содержащую те же числа, и складываем их.

До этого, когда он предлагал всякие нелепые объяснения, я каждый раз повторял: «Ну, так ты сам теперь можешь показывать этот фокус? Если ты считаешь, что я просто запомнил все числа, запомни их и ты, вот и весь секрет». Теперь, когда он и в самом деле научился показывать фокус и почти пришел к выводу, что я просто считаю быстрее, чем он, мне пришлось открыть ему секрет.

Задание 3. Та же задача на рефлексию, что и в прошлый раз, но со слегка измененными условиями: кто первый правильно ответил, получает 2 очка, кто второй правильно ответил, получает 1 очко. За неправильный ответ (или неопределенный ответ «не знаю») — 0 очков независимо от очередности. Игра окончилась вничью: каждый заработал по 28 очков.

Характерно, что Женя применял смешанные стратегии: видя 2, он не выжидал, а сразу и твердо заявлял либо 3, либо 1 — и иногда угадывал, получая 2 очка. При этом он своей решительностью сбивал Диму: например, Дима видит 3, и при этом Женя твердо заявляет: «Три!» Тогда Дима говорит: «Четыре», — и получает 0 очков.

Интересно, какая стратегия здесь оптимальна.

Картинки.

Я показал несколько картинок из «Кванта» и из других книг, в основном связанных с многогранниками. В частности, знаменитую картинку Кеплера (из «Мировой гармонии») с последовательно вписанными друг в друга сферами и правильными многогранниками (сферы представляют собой планетные орбиты).

К сожалению, картинки никакого впечатления не произвели, как и прекраснейшая армиллярная сфера Региомонтана (из книги Д. Херрмана «Открыватели неба»). В чём здесь дело, я не понимаю, но я был огорчен их равнодушием.

Занятие 62. Какая комната больше?

21 февраля 1983 (понедельник) $17^{00} - 18^{10}$ (1 час 10 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устный вопрос.

Я показал им 1-й и 2-й тома энциклопедии и сказал, что в каждом из них по 600 страниц. А сколько страниц расположено между 1-й страницей 1-го тома и последней страницей 2-го тома? (Правильный ответ — ноль.) Как это часто бывает с устными вопросами, течение тут же унесло нас куда-то в сторону от существа дела. Дима сложил $600 + 600$ и получил 1200; Петя тоже сложил $600 + 600$ и получил 1002; между ними завязался спор; Женя молчал. Я предложил Жене быть судьей. Он сказал: «Неправильно». — «Что неправильно?» Оказалось, что он успел забыть условие задачи (складывал $60 + 60$; точнее, не складывал, а просто сидел и ждал). Но когда я ему напомнил условие, он сложил правильно и стал на сторону Димы. В этот момент Дима решил, что поскольку спрашивают про страницы *между* первой и последней, то они сами не должны учитываться, и, значит, надо вычесть 2 (но вычитание произвел с ошибкой, получив 1180). Женя заявил, что нужно вычесть 4 (видимо, имея в виду не две страницы, а 2 листа).

Мы еще немного поговорили о том, что в книгах примерно по 600 страниц и что $1200 - 2 \approx 1200$. После этого я, наконец, снял с полки книги и показал им правильный ответ: 0 страниц. Первым понял Петя. Потом я еще объяснял ребятам, что для получения правильного ответа не требовалось знать количество страниц в книгах.

2. Какая комната больше?

На листках клетчатой бумаги нарисованы две «комнаты». Требуется определить, какая из них больше. Что значит «больше», я не объяснял, но Дима сам стал считать количество клеточек, объясняя, что в такой комнате «больше помещается».

В качестве комнат сначала шли прямоугольники 3×5 и 3×6; потом 3×6 и 5×3 (т. е. второй из прямоугольников — вертикальный). Видно, что в первый раз меняется только одно измерение, а во второй раз — одно измерение и расположение. На третьем листке были прямоугольники 3×6 и 5×4 (именно в этот момент Дима стал считать клеточки). Дальше начинались фигурки посложнее, и довольно быстро они стали весьма причудливыми, например, как на рис. 6.23.

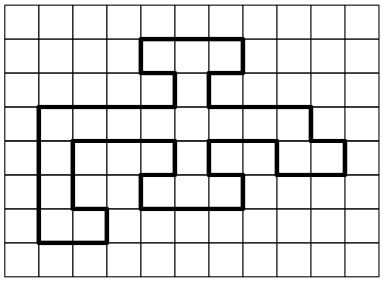


Рис. 6.23. Какая комната больше — вот эта, или прямоугольник размера 5×4?

Тем не менее, дети ответили правильно на все вопросы. Точнее, было так: Дима считал, Женя определял на глаз (и ни разу не ошибся), а Петя молчал.

Под конец Дима начал сам рисовать комнаты-лабиринты, так что я его едва остановил.

Задание 3. Фокус с кубиками.

Секрет этого фокуса очень простой, и я был уверен, что Дима до него догадается: я ему недавно рассказывал, что сумма чисел на противоположных гранях кубика всегда равна 7. Я его даже предупреждал, чтобы он, если догадается, никому не говорил. Но он не догадался.

А фокус был такой. Я дал ребятам два кубика и сам вышел в коридор. Я велел им бросить кубики и подсчитать сумму очков; затем перевернуть оба кубика вверх ногами и снова подсчитать сумму очков; наконец, обе суммы сложить. Наташа следила за правильностью всех манипуляций. Когда все вычисления были закончены (по секрету от меня), я объявил результат: 14.

После этого фокус был повторен с тремя, затем с четырьмя кубиками (с результатами 21 и 28 соответственно). Эффект, как и у предыдущего фокуса, был потрясающим.

Дима безумно оживился, велел принести таблицу предыдущего фокуса и стал сам его показывать Пете и Жене, и даже пытался намекать на разгадку, но я его остановил, хоть и не без проблем. (Это уже начинает напоминать одного купца из Салтыкова-Щедрина, все истории про которого заканчиваются одной и той же фразой: «Насилу его увели». Я, конечно, радоваться должен — всё-таки речь идет о Димином интересе к математике. Но, с другой стороны, иногда посещают сомнения: а не перебарщиваю ли я? Ведь ему еще нет даже семи.)

Между прочим, я явно недооценил трудность задачи с таблицей и соответствующим фокусом. Во вторник вечером Дима показывал этот фокус Грише Гальперину, и получаса размышлений Грише не хватило, чтобы, понять, в чём тут дело[5]. Потом, когда я ему рассказал Димино решение, он пришел в восторг и сказал, что оно ему нравится больше, так как получено в результате исследования и рассуждения, а не угадывания.

В общем, линию фокусов надо будет продолжить.

4. Картинки.

На этот раз мы рассматривали книгу В. Гильде «Зеркальный мир» (о симметрии). Но этим дело не ограничилось. В книге есть фотографии опытов с двумя зеркалами. Я снял зеркало на кухне, и мы долго и очень бурно развлекались, ставя его параллельно зеркалу в коридоре, а также под углом.

Занятие 63. Разум против случайности

28 февраля 1983 (понедельник) $17^{15} - 18^{15}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

О понятии множества.

Мы выясняли, каким словом называется много коров (стадо), много птиц (стая), много цветов (букет), много спортсменов (команда) и т. д. Потом я

---

[5] Г. А. Гальперин не только прекрасный математик (ныне — профессор Чикагского университета), но еще и страстный любитель всевозможных задач на смекалку.

объяснил, что в математике, чтобы не вводить так много разных слов, говорят всегда одинаково: *множество*. Поэтому нельзя сказать «букет коров» или «стая цветов», но можно сказать «множество коров» и «множество цветов».

Задание 1. Устная задача.

Брат старше сестры в два раза; а год назад он был старше ее в три раза. Как это могло произойти?

Мальчики предлагали самые фантастические объяснения: что это другие дети; что сестра — дочка не той же мамы, а мачехи; что брат мало ел и поэтому медленнее рос (Дима спрашивал: «Он старше по росту или по возрасту?»). Когда я все эти объяснения отмел, они твердо заявили, что такого быть не может.

Дальнейшее показало, что они не знают, что значит «в два раза старше» и «в три раза старше». В частности, Петя, придя домой, рассказал родителям эту задачу так: «Брат старше сестры на два года; а год назад он был старше ее на три года...»

Задание 2. Смертная казнь, или как воздействовать на удачу.

Один из ребят («палач») выходил в коридор; другой («казнимый») получал 8 шариков — 4 белых и 4 черных. Эти шарики он должен был разложить, как сам пожелает, по двум коробкам. Затем возвращался палач, выбирал наудачу одну из коробок, а из нее — наудачу один из шариков. Черный шар означал «казнь», а белый спасение. Каждый подвергался этой процедуре 6 раз, а чтобы не забыть, получал после каждой казни черный жетончик, а после каждого спасения — белый жетончик.

В итоге Дима был казнен 3 раза, Петя тоже 3, а Женя — 2 раза. Петя с самого начала избрал наилучшую стратегию: в одну коробку клал один белый шар, а в другую — 3 белых и 4 черных. При этом вероятность спастись равна

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{7},$$

а вероятность гибели, соответственно, $\frac{2}{7}$. Однако результат его после первых двух испытаний был 1 : 1, хуже, чем у Жени, который играл без всякого особого смысла, но оба первых раза выиграл. Дима же с самого начала избрал наихудшую возможную стратегию: клал отдельно один черный шар (при этом, наоборот, вероятность *погибнуть* равна $\frac{5}{7}$, а вероятность спастись — $\frac{2}{7}$). Петя даже воскликнул один раз: «Ой, Димка, что ты себе сделал!» Тем не менее, и его результат, как и у Пети, был 1 : 1. Отчасти это, как и дальнейшие результаты, объяснялось еще и тем, что Женя, будучи палачом, подглядывал в коробки перед тем, как вытащить шар.

Логику Димы можно себе представить примерно так: авось повезет, и коробку с черным шаром не выберут; а тогда во второй коробке будет зато на один черный шар меньше (ну, если не повезет и выберут первую коробку, так уж ничего не поделаешь; в конце концов, ведь в любом случае может не повезти). Следуя этой логике дальше, он потом немного улучшил свою стратегию: стал изолировать в отдельной коробке сначала 2 черных шара, а затем все четыре; таким образом, он пришел от наихудшей стратегии к средней, дающей равные шансы на выигрыш и проигрыш. Характерно, однако, что под его влиянием Петя ухудшил свою стратегию и тоже свел ее к средней. Женя же применил третью схему. Он заметил (по его словам), что коробки — разного цвета, одна сиреневая и одна синяя, и все всегда выбирают сиреневую коробку. Вот он и стал класть в нее по 2 белых шара.

Вообще, эта задача (точнее, не сама задача, а ее материальное воплощение, данное мной) обладает двумя недостатками. Во-первых, это «субъективизм» в выборе коробки (Женя заметил, что чаще выбирают сиреневую; я сам заметил, что чаще выбирают левую). Надо бы сделать процедуру выбора более объективной, например, выбирать коробку подбрасыванием монеты. Во-вторых, шарики, положенные в коробку, детям не видны, и поэтому они не могут «следить за развитием событий». Надо бы обдумать эту задачу еще раз.

Задание 3. Фокусы с задуманными числами (см. стр. 167).

Демонстрация фокуса столкнулась с непредвиденными трудностями: Петя и Женя совершенно разучились считать. Когда я говорил «умножьте на 2», они не понимали, что это значит. Когда я говорил «поделите пополам», Петя мысленно представлял себе две половины, но *обе вместе*, и когда я после этого говорил «прибавьте 1», он не понимал, к чему прибавить (к одной половине или к обеим?)

Надо сказать, что Дима сам демонстрировал этот фокус, и притом вполне успешно: задавал довольно хитроумные последовательности действий и при этом не ошибался. Он всё порывался поскорее раскрыть секрет, а когда я ему не дал, он показал последний свой фокус так: «Задумай число, прибавь 1, отними задуманное; получилось 1». Но, кажется, его никто не понял.

Выяснилось также, что где-то посреди недели Дима успел рассказать Пете секрет фокуса с таблицей. Так что Петя попросил принести таблицу и стал показывать этот фокус Жене. Дима тоже порывался, но Женя ему отрезал: «От тебя я уже видел». После занятия Петя попросил разрешения унести таблицу домой, чтобы показать фокус родителям. Думаю, что теперь из справедливости следует рассказать секрет Жене тоже.

Паркеты (картинки).

В заключение я показал мальчикам симметричные «паркеты» (заполнения плоскости) из книги Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп», а также «паркет из ящериц» с гравюры Эшера.

Когда Петя с Женей уже одевались, я им задал задачу из книги Труднева[6], которую уже раньше задавал Диме:

По тропинке вдоль кустов
Шло 11 хвостов.
Сосчитать я также мог,
Что шагало 30 ног.
Это вместе шли куда то
Петухи и поросята.
А теперь вопрос таков:
Сколько было петухов?
И узнать я был бы рад,
Сколько было поросят.

Задача вызвала большое оживление и хохот, но никто не потрудился вдуматься в ее содержание, только Женя всё твердил, что нужно 11 поделить пополам, и когда мы ему объяснили, что получится пять с половиной поросят, он удивленно спрашивал, а что же еще можно сделать. Впрочем, потом он мне позвонил из дома, чтобы уточнить условие (сколько хвостов и сколько ног) — подозреваю, что под влиянием родителей.

Что мне нравится в Диме — так это то, что он потом действительно думает над задачами, которые не получились. В частности, во вторник он самостоятельно решил задачу 1 (он хотел объяснить Алле, что такого не может быть, стал приводить примеры, и случайно наткнулся на пример $(3,9) \to (6,12)$).

$\lhd$ Я еще раньше понял, что отношение получается другое, когда увидел, что через год детям будет 10 и 4, но при этом 10 на 4 не делится. Но уверенности не было. Когда стало ясно, что отношение меняется, то думать дальше мне стало неинтересно. Хотя в задаче сказано, что мальчик стал в 2 раза старше через год, а не через 3, я был вполне удовлетворен своим решением. — Дима. $\rhd$

Кроме того, он еще заставил Аллу играть с ним в игру с шариками, однако пришел лишь к стратегии (1 белый, 1 черный), (3 белых, 3 черных).

[6] В. П. Труднев «Считай, смекай, отгадывай!», М.: Просвещение, 1964.

Забавная история произошла во вторник у меня на работе. Я стал рассказывать про фокус с задуманным числом, но никто, кроме одной сотрудницы, не смог понять, в чём секрет, а, наоборот, все были поражены тем, как это мне удается угадать результат.

Алла заметила, какая характерная реакция была у мальчиков в конце задачи с шариками. Я сказал, что ответ я им не скажу, но кто-то один из них несколько раз играл самым лучшим способом... — на что Петя сказал: «Это наверно я», а Дима сказал: «Это наверно Женя» (у Жени было меньше всех черных жетонов) — ...а кто-то один из вас, продолжал я, играл несколько раз самым худшим способом... — на что Петя сказал: «Это наверно я», а Женя сказал: «Это наверно Дима». Здесь все характеры как на ладони.

Занятие 64. Снова сражаемся с шансами

14 марта 1983 (понедельник) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Я напомнил ребятам про задачу, в которой брат старше сестры сначала в три раза, а потом в два раза, и попросил Диму рассказать решение. Он рассказал оба придуманных им решения: $(3,1)+1=(4,2)$ и $(9,3)+3=(12,6)$. Петя, оказывается, решение уже знал — ему Дима успел рассказать, а Женя был очень удивлен и всё спрашивал, как же это так получается.

Задание 2. Смертная казнь с «прозрачными процедурами».

Я повторил игру со смертной казнью, но при этом полностью изменил ее физическое представление. Я взял планшет с дырочками для игры в Mastermind, а также 10 фишек из этой игры — 5 белых и 5 черных (т. е. число белых и черных шариков тоже увеличено с четырех до пяти). Вместо коробок фишки располагаются в два ряда, и ребята всё время их видят. Таким образом, весь процесс случайного выбора происходит непосредственно у них на глазах (рис. 6.24).

Сам случайный выбор («судьба» или «палач» — можно называть как угодно) осуществляется с помощью таблицы случайных чисел. По первой цифре, в зависимости от ее четности, мы определяем «коробку», (т. е. какой из двух рядов мы выбираем). Если в выбранном ряду, к примеру, 7 фишек, то мы, просматривая очередные цифры таблицы случайных чисел, выбираем первую из них, лежащую в пределах $1 \leq i \leq 7$, и она указывает нам номер шарика в выбранном ряду.

-- ●○●○○●● --- ч

----------- ●○○ --- н

Рис. 6.24. Если случайная цифра четная, выбираем первый ряд, если нечетная — второй. Если мы попали в первый ряд, ищем очередную случайную цифру в пределах от 1 до 7; если во второй — ищем цифру в пределах от 1 до 3. Эта цифра и указывает нам, какую фишку выбрать. Ну и, наконец, если фишка черная, нас «казнят», а если белая, то мы спасены.

Каждый из ребят расставлял фишки так, как он считал разумным, после чего производилось 10 игр. Результаты записывались: по предложению Димы спасение обозначалось крестиком, а смертная казнь ноликом.

Первым играл Дима. Он поставил комбинацию $[3,2]+[2,3]$; счет игры $5:5$. Следом играл Женя. Он долго переставлял разные фишки туда и сюда, и в итоге остановился на комбинации $[2,3]+[3,2]$. Я намекнул, что это та же самая комбинация, что уже была. Однако сыграли. Счет $3:7$, т. е. 7 раз казнили. После этого Петя снова поставил $[3,2]+[2,3]$! Это меня уже шокировало. Я еще раз объяснил, что комбинация та же самая, и что мы только что убедились на двух примерах, что она либо безразлична, либо даже невыгодна.

◁ Папа несколько раз, опираясь на статистику, повторял, что эта комбинация немножко невыгодная, чем совершенно сбил меня с толку. Я даже стал придумывать причины, почему она невыгодная, хотя симметричная. — Дима. ▷

Тем не менее сыграли снова со счетом $5:5$. Очередь опять перешла к Диме, и он поставил свое излюбленное *наихудшее* решение: $[0,1]+[5,4]$ (т. е. один *черный* шар отдельно, а остальные 9 в другом ряду). Демонстрация была эффектной: он проиграл все 10 раз! Все очень веселились, в том числе он сам. К концу игры глаза его засветились, и он сказал: «А! Я знаю, как я в следующий раз буду играть!» — он явно в этот момент понял, каково правильное решение.

Очередь, однако, перешла к Жене, и он снова поставил $[3,2]+[2,3]$. Даже Дима удивился и сказал: «Опять то же самое!», а я так вообще расстроился. Сыграли еще раз — снова со счетом $5:5$. Я решил на этот раз поговорить подробнее, и мы стали еще раз все вместе обсуждать это решение. В частности, подвели суммарные итоги четырех игр по этому варианту — $18:22$. Так что, сказал я, надо пробовать какие-то другие варианты, надо *думать*, а не только рассчитывать на удачу и везение. Вот Женя не захотел подумать... «А зато у Димы было еще хуже», — вставил Женя. Я согласился и сказал, что зато Дима пробовал что-то новое, и что он «ценой собственной жизни» нашел хорошее решение, и что он его еще покажет... Так я выступал минут пять. Следующим играл Петя, и к моему полному ужасу и отчаянию он снова поставил $[2,3] + [3,2]$!

$\triangleleft$ А к моему облегчению. Всё это время я страшно боялся, что кто-нибудь тоже придумал наилучший вариант, и я окажусь не первый. Чтобы никто не стал думать, я старался делать вид, что ничего особенного не придумал (хотя у меня даже зубы стучали от возбуждения). Моя фраза: «Опять то же самое!» была вызвана тем же притворством: видите, всё нормально, я даже удивляюсь, что опять то же самое. Но тут папа, как назло, стал всем говорить, что я придумал хорошее решение! Только когда Петя поставил $[2,3] + [3,2]$, я, наконец, успокоился. — Дима. $\triangleright$

Я даже не удержался от комментариев: «Петя всё-таки ни за что не хочет думать, не хочет использовать свой ум. Ну, смотри, Петя, голова твоя, и казнить будут тебя самого, а не нас». Петя в ответ лишь хихикал кокетливо: вот, мол, какой я очаровательный — даже подумать не хочу. А Женя сказал: «А зато у Димки было еще хуже!» Сыграли. Ответ, как всегда, $5:5$.

Очередь опять вернулась к Диме. Он, как я и ожидал, поставил на этот раз наилучшую комбинацию $[1,0]+[4,5]$ — и выиграл со счетом $9:1$. Женя сказал, что он хочет оставить ту же комбинацию — и тоже выиграл, с тем же счетом $9:1$. Наконец, и Петя оставил ту же комбинацию, и тоже выиграл, хотя и с меньшим счетом $6:4$. После этого мы подсчитали и суммарную статистику $24:6$.

$\triangleleft$ Меня эта операция удивила: только что было соревнование, а теперь вдруг все результаты складываются. — Дима. $\triangleright$

Заметим, что вероятность выигрыша при этой комбинации равна

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}=\frac{13}{18}<\frac{24}{30}=\frac{4}{5},$$

так что судьба нам еще слегка благоприятствовала, сделав правильность решения более наглядной.

Как это порой бывало и раньше, кое-что прояснилось для меня после окончания занятия: мальчики долго спорили о том, как лучше расставить фишки *внутри одного ряда*! Так что я был не совсем справедлив, а правильнее было бы сказать — совсем несправедлив, и все эти однообразные $[3,2] + [2,3]$, возможно, вовсе не казались им такими уж одинаковыми. Может быть, они даже внимательно наблюдали (как игрок в рулетку), какие цифры выпадают чаще, и пытались ставить белые шарики на эти места. Если это так, то во время занятия всё это, к сожалению, прошло полностью мимо меня. Я был совершенно ослеплен своим высшим знанием — «самоочевидностью» того, что шансы не зависят от места. По отношению к феноменам Пиаже литература заранее подготовила меня к тому, чего следует ожидать, т. е. к нормальным реакциям нормальных детей. А вот по поводу восприятия случайности я ничего такого не читал. В результате я мгновенно превратился в стандартного «поучателя», который «знает как надо» и поэтому требует от детей одного лишь подчинения своим идеям.

3. Геометрический фокус.

Предыдущее задание заняло почти весь час, так что у меня осталось всего минут пять. Времени на еще одну задачу не было; поэтому за оставшееся время я только успел показать детям один простенький фокус. На их глазах нарисовал на листе бумаги несколько параллельных полосок, затем разрéзал листок по линии, соединяющей противоположные концы противоположных полосок. После этого одна половинка сдвигается относительно другой (рис. 6.25) — и количество полосок оказывается на одну меньше!

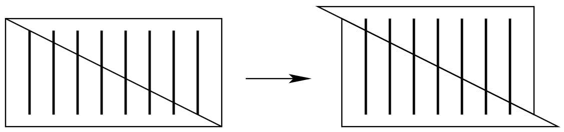


Рис. 6.25. Было 8 вертикальных полосок, а стало 7. Куда девалась восьмая?

Однако дети легко разгадали этот фокус.

На этом занятие закончилось.

«А картинки?» — спросил Петя. Однако картинки у меня были подобраны к той задаче, которую я дать не успел. Я это объяснил и обещал показать их в следующий раз.

Занятие 65. Гомеоморфизм

21 марта 1983 (понедельник) $16^{10} - 17^{10}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Разрезные шансы.

Мы вернулись к задаче со смертной казнью и проделали что-то вроде «подсчета шансов» на выигрыш. Конечно, не было никакой надежды на сложение дробей, а тем более на использование формулы полной вероятности.

Однако я убедился в том, что интуитивно дети эту формулу понимают. Я поступил следующим образом. Заготовил множество одинаковых полосок бумаги — шириной 1,5 см и длиной 40 см. Каждая полоска было разделена линией ровно пополам, на 20 и 20 см: это означало, что с равными шансами можно попасть в левую и в правую коробку. Далее каждая половина была тоже разделена на равные части, но на *разное* количество частей — например, левая на 2 равные части, а правая на 8, или левая на 3, а правая на 7 и т. д.; в том числе были и такие, что левая сторона вообще не поделена, а правая поделена на 9 частей.

Затем ребята по очереди расставляли каким-нибудь образом шарики, и мы «вычисляли» шансы на спасение и гибель: разрезали сначала полоску пополам, а затем каждую часть разрезали в пропорции белых шариков к черным в соответствующей коробке, после чего клали «белые» (выигрышные) куски полоски налево, а «черные» — направо. В результате было наглядно видно, какое решение лучше, а какое хуже — просто сравнением длин шансов на выигрыш.

Надо сказать, что всё-таки две идеи остались слегка туманными. Во-первых, Петя еще не усвоил различие между законом сохранения числа и законом сохранения длины (когда-то мы этим специально занимались — см. задачу про короткие и длинные дорожки, занятие № 51; тогда эту разницу понимал один Женя). Петя спорил со мной, что «здесь 5 шансов, и здесь тоже 5», показывая на полоски одинакового количества, но разной длины. Я попытался объяснить, в чём дело, но боюсь, что мое объяснение повисло воздухе.

Во-вторых, мальчики по-прежнему пытались переставлять шарики в одном ряду. У меня была идея вырезать, скажем, из девяти равных частей, на которые поделена правая половина, не первые четыре части, а те четыре, которые соответствуют местам, занимаемым белыми шариками — чтобы они сами заметили, что это безразлично. Но я боялся сделать задачу слишком длинной и скучной.

Забыл упомянуть, что перед началом задачи я им показал картинку из книги Куна «Легенды и мифы Древней Греции», на которой Гермес взвешивал жребий Ахилла и Мемнона, чтобы определить, кто из них победит. Потом сказал, что поскольку у нас нет весов, мы будем сравнивать не по весу, а по длине.

Задание 2. Гомеоморфизм букв.

Говорят, что эту задачу В. И. Арнольд любит давать студентам: требуется классифицировать буквы русского алфавита по топологической эквивалентности. Сначала я попытался, насколько возможно, описать задачу в наглядных терминах, т. е. объяснил, что фигурки, которые я буду рисовать, сделаны из такой мягкой проволочки, которую можно как угодно мять, сжимать и растягивать, но только нельзя рвать и склеивать. Потом каждый из нас нарисовал гомеоморфный образ окружности. Потом я стал по очереди рисовать буквы, и мы их раскладывали в ряд, а те, что гомеоморфны, клали друг под другом, как показано в табл. 6.1. Некоторые буквы я писал в двух вариантах; например, букву И можно нарисовать в двух видах:

И и И.

В первом случае она попадает в один класс с буквой Г, а во втором — в один класс с буквой Н. Иногда при обсуждении я нарочно называл треугольник кружочком и т. п. Надо сказать, что мальчики прекрасно справлялись с задачей, гораздо лучше, чем можно было ожидать. Дошли мы до буквы У. В следующий раз я собираюсь эту задачу продолжить, а заодно включить в список также и буквы латинского алфавита.

А	Б	В	Г	Е	Ж	К	О	Ф	Х	Ю
Д	Р		З	Т		Н				
Я	Ъ		И	У		Щ				
	Ь		Л	Ц						
			М	Ч						
			П	Ш						
			С	Э						

Таблица 6.1. Буквы, расположенные в одном столбце, гомеоморфны друг другу; в разных столбцах — нет.

3. Картинки.

На этот раз я показал ребятам книгу А. Т. Фоменко и А. С. Мищенко «Дифференциальная геометрия и топология», объяснив, что книга не для школьников, а уже для студентов.

Сначала я показал им жирафа, который гомеоморфно преобразуется в бегемота; потом остальные картинки (иногда кое-что поясняя). Когда мы дошли до листа Мёбиуса, меня поразил Женя, вспомнив, что мы когда-то клеили такой же на нашем занятии. А ведь это было более двух лет назад, в феврале 1981 года! Вслед за Женей вспомнили и Петя с Димой. Отсюда следует сделать вывод, что ничто из наших занятий не пропадает понапрасну — любая вещь, даже непонятая, может в нужный момент выплыть.

Под конец я, не удержавшись, показал еще на книге дарственную надпись Фоменко.

Задание 4. Фокус.

Я вообще-то показывать фокус на этом занятии не собирался (я имею в виду фокус с таблицей). Просто, поскольку Дима уже рассказал секрет Пете, и к тому же Петя носил его домой показывать, я решил, что будет справедливо рассказать секрет Жене тоже, и чтобы он тоже мог самоутвердиться и показать фокус родителям.

Однако Санька[7] у Пети мою таблицу порвала, и я решил сделать другую таблицу вместе с Димой. Для этого в пятницу мы с ним нарезали 25 квадратиков из бумаги, написали на каждом по цифре (предварительно позаботившись, чтобы их сумма равнялась $5 \cdot 20 = 100$), после чего Дима стал сам раскладывать их так, чтобы получился «магический квадрат» и чтобы по возможности в каждом ряду не было совпадающих цифр. В конце я ему немного помогал. То, что в итоге получилось, показано ниже.

4	0	2	8	6
5	7	1	4	3
1	3	9	5	2
7	4	8	1	0
3	6	0	2	9

$\lhd$ Таблица для фокуса состоит из девяти одинаковых квадратов. При этом сумма пяти соседних цифр равна 20 даже когда часть этих цифр лежит в одном квадрате, а часть в другом. Я не мог понять, почему так получается, но и спрашивать не стал. — Дима. $\rhd$

На базе этого квадрата Алла в воскресенье начертила таблицу для фокуса размером 15×15, так что еще в воскресенье Дима имел возможность показать этот фокус дедушке с бабушкой.

Заодно возникла идея нового фокуса: закрывать не 4 цифры, а 6. Ясно, что сумма будет равна $20 +$ (крайняя цифра). Эту крайнюю цифру можно определить по периодичности.

[7] Петина младшая сестричка.

Этот последний фокус я несколько раз показал к концу занятия, но не настойчиво, а так — для разговора. В основном же я объяснял Жене идею фокуса. Его реакция была, я бы сказал, «школьной». Как это часто бывает, когда говорят не всем, а обращаются к нему лично, он сжался в комок, окаменел и отключился. При этом он усиленно кивал головой, хотя видно было, что ничего не воспринимает. Так я всё рассказал и спросил: «Понятно?» Он продолжал кивать головой. Я закрыл четыре цифры и спросил, сколько будет в сумме. Его глаза округлились от ужаса: оказывается, от него не отстали, несмотря на поддакивание, и теперь приходится отвечать самому, а ведь он всё пропустил! Видно было, как он напрягся, пытаясь прокрутить в голове, что это такое я ему только что говорил. Уже через полминуты он прекрасно всё сообразил и сказал: «Надо отнять четыре...». Еще минуту у него заняло вычитание четырех из двадцати — он всё никак не мог освободиться от скованности. Но когда это, наконец, удалось, он стал показывать фокус так же легко и быстро, как Дима.

Занятие 66. Топология

28 марта 1983 (понедельник) $17^{15} - 18^{00}$ (45 мин.)
(Дима, Петя)

Занятие было более коротким, чем обычно: мы ждали гостей, и я немножко спешил.

Задание 1. Гомеоморфизм букв (продолжение).

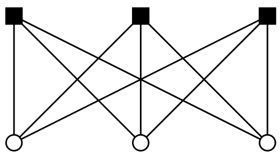
Мы закончили русский алфавит, затем добавили к нему латинский, потом цифры, а потом еще ноты и разные другие музыкальные значки (бемоль, диез, бекар). Вся эта совокупность фигур была расклассифицирована по топологической эквивалентности. Мальчики прекрасно справлялись с задачей, и, как правило, всё делали сами. Лишь в некоторых случаях они не смогли угадать гомеоморфизмов: Щ $\simeq$ Н, ♮ $\simeq$ А и некоторых других. Но и в этих случаях они сразу и легко понимали мои объяснения, а иногда достаточно было одного лишь ответа.

Надо будет придумать им еще задачи на гомеоморфизм.

Задание 2. Домики и колодцы.

Классическая задача: есть три домика и три колодца, и требуется от каждого домика к каждому колодцу провести по тропинке, да так, чтобы никакие две тропинки не пересекались (рис. 6.26).

У меня с этой задачей связано одно своеобразное воспоминание. Возраст не помню. Наша соседка по коммунальной квартире, вскоре умершая от



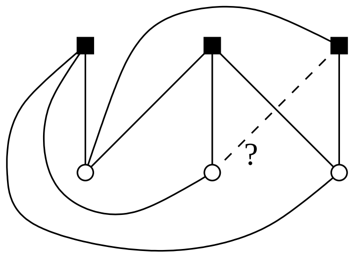


Рис. 6.26. Три домика, три колодца и девять тропинок. Нарисовать тропинки на плоскости так, чтобы они не пересекались, невозможно.

алкоголизма, дала мне эту задачу, снабдив ее таким комментарием, что, мол, тот, кто ее решит, заработает очень много денег. Я, помню, долго возился... Через несколько лет я узнал ее (не соседку, а задачу) как старую знакомую в какой-то популярной книжке по математике.

Задача, как известно, неразрешима — соответствующий граф, обозначаемый $K_{3,3}$, не является планарным. Поэтому мальчики некоторое время повозились с нею, а потом я задал ее в качестве домашнего задания. Дима всё удивлялся, что каждый раз получаются все тропинки, кроме самой последней.

Занятие 67. Четыре краски

28 апреля 1983 (четверг) $17^{00} - 18^{20}$ (1 час 20 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Игра «ним».

Первый игрок пишет число от 1 до 10, второй добавляет к нему число от 1 до 10, третий тоже и т. д. Выигрывает тот, кто первый напишет число 100. Вообще-то игра рассчитана на двух участников. Если участников трое, то никто из игроков не может обеспечить себе победу, но в определенный момент один из них может по своему усмотрению «отдать» победу либо следующему за ним игроку, либо через одного. Так, получив от предшествующего игрока число 88, он уже не может выиграть сам (если его партнеры не поведут себя глупо), но может, написав, соответственно, 90 либо 89, дать победу следующему или через одного. Рано или поздно кто-нибудь из игроков обязательно оказывается в такой ситуации. Дима один раз отдал победу Жене и один раз Пете, Женя — один раз Диме и один раз мне (я участвовал в одной партии, последней).

Задание 2. Четыре краски.

Сначала я показал детям географическую карту и объяснил, почему разные страны закрашиваются в разные цвета. Потом мы обсудили вопрос о том, что не обязательно все цвета делать разными (важно только, чтобы соседние страны можно было отличить друг от друга).

После этого я рисовал ребятам на листе бумаги разные «карты», всё более сложные, и они их «закрашивали» четырьмя красками. Слово «закрашивали» я взял в кавычки, так как фактически у нас были картонные жетоны четырех цветов, и мы их просто клали на соответствующую страну. Такая система помогала легко пробовать разные варианты, менять раскраски, удалять ошибки и т. д.

Всего мы раскрасили три карты. В заключение я рассказал мальчикам о проблеме четырех красок, о том, что ее 100 лет никто не мог решить, и, наконец, о решении и о вычислительных машинах, которые делают миллион операций в секунду и которые работали 1200 часов, чтобы решить эту задачу.

3. Картинки.

На этот раз мы рассматривали книжку И. Я. Депмана «Мир чисел». Беседа оказалась очень содержательной и в некотором роде «развивающей». Мы успели посмотреть всего несколько страниц и наткнулись на маленький рисунок Стоунхенджа. Ребята спросили меня, что это такое, я стал рассказывать и принес сразу три книги про Стоунхендж: «Разгадка тайны Стоунхенджа», «Солнце, Луна и древние камни» и «Кроме Стоунхенджа». Из этих книг мы посмотрели некоторое количество фотографий. Потом перевернули еще пару страниц в книге Депмана и наткнулись на египетские пирамиды. Оказалось, что никто из мальчиков никогда ничего не слыхал о пирамидах. Я стал рассказывать, достал альбом «Искусство Древнего Египта», и мы еще порассматривали и его. На этом занятие окончилось.

* * *

На самом деле на этом закончился учебный год; видимо, что-то помешало нам продолжить занятия в мае (праздники? болезни? — не помню). В дневнике на эту тему есть только одна фраза, записанная в конце лета: «Занятия с мальчиками я планирую возобновить с октября. А с нового года, если хватит сил, начну заниматься с девочками».

О том о сём: шутки, разговоры, задачи

Выдающийся американский педагог Сеймур Пейперт в своей главной книге «Переворот в сознании»[8] пишет: «Что, если математика имеет с шутками, снами и истерией больше общего, чем принято думать?». Сны и истерию мы, пожалуй, оставим более серьезным людям; ну а в том, что касается юмора, нет никаких сомнений в его тесной связи с логикой. Тот факт, что Льюис Кэрролл является также и одним из основоположников современной математической логики, ни в коей мере не является случайностью.

После того, как я однажды записал разговор о зоопарке и обезьянах (см. стр. 102), мне пришло в голову, что, быть может, такие вот разговоры сами по себе являются интегральной частью наших математических занятий. Время от времени я стал записывать их тоже. Иногда это было что-то «умное» (например, наша с Димой беседа о том, какие тела падают быстрее); иногда просто смешное. Следует откровенно признать, что *записанные* разговоры до некоторой степени являются *воображаемыми*. Дело в том, что они возникают и развиваются совершенно спонтанно — и моментально улетучиваются из головы. Я пытался вспомнить несколько из них: я помню обстоятельства, реакцию детей и многое другое, но не могу вспомнить тему разговора. Однако даже когда тему удается удержать в голове, все равно разговор, восстановленный по памяти, это почти что заново сочиненный. К тому же, реальный разговор может прерваться в совершенно произвольном месте, а вовсе не там, где этого требовала бы логика развития сюжета. Да и вообще в таком жанре вовсе не грех что-нибудь присочинить потом. Думаю, что Кэрролл именно так и поступал: разговаривал с реальной Алисой Лидделл, а потом сочинял что-нибудь вокруг... Однако исходно я писал дневник, а не беллетристику, и сейчас решил придерживаться того, что было записано тогда.

В этом разделе жанр постепенно эволюционирует — от обыкновенной болтовни сначала к более серьезным темам и, ближе к концу, к обсуждению математических тем и задач; ведь мы с Димой обсуждали математику и вне рамок кружка тоже.

Болтаем...

1. Разговор за обедом. Конец марта 1983. Всем раздается жареная рыба.
Я: Женечка! А что ты у рыбки больше любишь — ножку или крылышко?
Женя: Ножку.

[8] С. Пейперт «Переворот в сознании: дети, компьютеры и плодотворные идеи», М.: Педагогика, 1989.

Дима: Женя, а разве у рыбок есть ножки и крылышки?

Женя: Да.

Дима: Нет, нету. Ведь рыбки плавают в воде, и им там ножки не нужны.

Женя: Но, Дима, это же не настоящая рыбка! Она же сейчас не плавает! Потому что мы ее будем есть.

Дима: Но раньше-то она плавала!

Я: Что-то я тут не понимаю; я вот, например, тоже раньше плавал, но у меня, тем не менее, ножки есть.

Женя: Папа плавал в озере!

Дима: Но всё равно! Рыба почти всегда двигается по воде, а папа по земле!

Алла: Как паровоз. (Смех.)

Дима: Нет, не так быстро!... А, знаю, ты сейчас скажешь «улитка». (Задумывается.) Ну, всё равно — паровоз едет, улитка ползает, а папа *идет*.

Алла: Как дождь. (Общий хохот.)

Дима: Нет!! Дождь падает сверху вниз, а папа не падает!

Я: Я думаю, что если меня положить на тучу, так я тоже буду падать.

Дима: Нет, дождь падает отдельными каплями. И вообще, дождь капает, а папа не капает.

Алла: Ну почему же, папа иногда тоже капает. (Мы с Аллой переглядываемся: замечание вышло несколько двусмысленное.)

Дима: Нет, не капает! Ну когда он капает?

Алла: Ну, например, когда помоется в душе.

Дима: Так это не *он* капает, а *с него* капает!

Я (после паузы): Ну, хорошо, допустим, мы даже согласимся с тем, что папа не капает. Но как отсюда следует, что у рыб нету ног? Вот чего я не понимаю! (Опять общий хохот.)

Тут, однако, выясняется, что Дима, увлеченный разговором, весь измазался в еде. Мы его посылаем умываться, и на этом обсуждение кончается.

2. Отвлекающие маневры. Начало мая 1983. Дети пришли с прогулки. Женя капризничала, кричала, чтобы Дима ей помог расстегнуть куртку. Дима ей отвечал сурово: «Попроси хорошим голосом». (Как старший брат, он не упускает возможности ее повоспитывать.) Женя кричала: «Я говорю хорошим голосом!!» Тут я вмешался.

Я: Женечка, а какой у тебя есть самый-самый хороший голос?

Женя: Нет у меня никакого голоса, есть только голова!! (???... Странный ответ, но он был именно таков. Учтем, что Жене три с половиной года.)

Я: А что такое голова?

Женя: Это то, что стоит! (???)

Я (показывая на шкаф): Вот — стоит, значит, это голова?

Женя: Нет, это шкаф.

Я: А где же голова?

Женя (немного смягчившись — показывает): Вот голова.

Я: Нет, это шапочка.

Женя (снимает шапочку): Ну вот, во-от!

Я: Нет, это волосики.

Вмешивается Дима, который обожает такие разговоры и уже прыгает от нетерпения.

Дима: Ну, голова — это вот, вот (чертит в воздухе рукой вокруг головы).

Я: Что «вот, вот»?

Дима: Голова — это нос, рот, волосы, подбородок, усы, глаза — ну, всё!

Женя (повторяет Димины движения, обкручивая руки вокруг лица, как бы умываясь): Голова — это вот, вот! (уже весело).

Я: Значит, ты говоришь, голова — это глаза, рот, усы... Например, твои глаза, мои усы, Женин нос...

Дима: Нет, только мои глаза, мой нос!

Я: Ну, хорошо, я бы всё понял; только я не понимаю, что значит «твой».

Дима: Ну как! Мой — значит то, что мое, то, что у меня!

Я: А что такое «ты»?

Дима: Я — это я. Вот я (тычет в себя пальцем).

Я: Что, «ты» — это вот эта пуговица?

Дима: Нет — вот я!

Я: А-а, вот эта рубашка!

Дима: Нет, и рубашка, и пуговица, и вообще всё мое.

Я: А *я*, значит, это *всё мое*?

Дима: Да.

Я: Вот, например, Женя — моя? Моя! Ведь она моя дочка.

Дима: Нет, Женя не твоя часть! Ты — это все твои части.

Я: Какие части?

Дима: Ну, руки, ноги, голова...

Я: Голова! Но ведь я не знаю, что такое голова! Ты мне как раз это объяснял.

Дима: Но ведь я тебе уже объяснил. (Он явно не видит логического круга.)

◁ На самом деле видел, но не хотел признаваться. — Дима. ▷

Я: Когда ты объяснял мне, что такое голова, ты употребил непонятное слово «мой». Поэтому я не понял, что такое голова, и попросил тебя объяснить, что значит «мой». А теперь ты объясняешь слово «мой» через слово «голова», которого я еще не знаю.

Женя: Пить хочу! Папа, дай, пожалуйста, гриба[9]. Папа, я хорошая девочка и поэтому говорю «пожалуйста».

Я (чтобы закончить): Вот видишь, Дима, как бывает трудно объяснить самые простые вещи.

[Не хочу создать у читателя представление, что я всегда так ловко выходил из трудных воспитательных ситуаций. Но об успехах писать приятнее.]

3. О «принципе фальсифицируемости» по Карлу Попперу. Лето, Новые Сенжары (Украина). Шли мы как-то вдоль реки Ворсклы, и было на берегу очень много лягушек. Алла спросила, как мы думаем, сколько мы встретили лягушек. Сама она считала, что примерно штук сто. Дима сказал, что, по его мнению, примерно штук тридцать. Я сказал, что триста. А когда мы спросили у Жени, она ответила: «Много».

Я спросил: «Как ты думаешь, Дима, кто из нас четверых наверняка прав?» — «Наверное, ты», — ответил он. — «Нет, — сказал я, — наверняка права Женя. Каждый из нас, может быть, и ошибся, а уж Женя точно сказала правильно: лягушек и вправду много».

Конечно, тут есть повод умилиться Жениной детской непосредственности. Но я не мог упустить такой удобный момент для философских выводов. «А отсюда мораль, — сказал я. — Если человек всегда говорит всё правильно, то это еще вовсе не значит, что он самый умный». — «Почему?» — «Потому что умный человек тот, который говорит не только правильные вещи, но и *нетривиальные*, не очевидные сами по себе. Если он при этом иногда и ошибется, он всё равно умный. А другой говорит только то, что и без того понятно, что и говорить не обязательно. И, хоть он всегда говорит всё правильно, но ума большого для этого не надо».

На что Дима спросил: «Папа, а почему ты всегда говоришь какую-нибудь мораль?»

4. Парадокс Зенона. 5 мая 1983. Некоторое время назад мы, пользуясь указаниями «Физики для малышей», делали *стробоскоп*, т. е. нечто вроде примитивного мультфильма. Видимо, по мотивам этой деятельности Дима задал мне такой вопрос: «Папа, вот я понимаю, как в мультфильме: там показывают ногу вот так, потом вот так, маленькими скачками, а нам кажется, что она движется. А как *просто нога*, сама? Ведь там же нет никаких скачков, даже самых маленьких. Как же тогда она может двигаться?» И дальше,

[9] Напиток.

немного сбивчиво, но вполне понятно, он изложил мне фактически полный эквивалент парадокса Зенона о стреле. Дальше идет моя часть, которая не так интересна. Я ему рассказывал про Зенона, и про Диогена, и про стихотворение Пушкина («Движенья нет — сказал мудрец брадатый. . . »), и даже кое-что про квантовую механику (почему нельзя увидеть, как летит электрон). Но главная мысль, которую я пытался ему внушить, состояла в том, что речь в его вопросе идет не о само́м явлении, а о наших мыслях о нём, что мы не можем «точно знать, как на самом деле», а можем только мыслить без противоречий. По его ремаркам мне казалось, что он понимает меня, однако вечером он снова стал спрашивать, как же всё-таки нога движется на самом деле.

◁ Если я правильно помню этот разговор, то, по-моему, папа мне действительно не ответил, а только рассказал, что тот же вопрос задавал Зенон. Я, правда, думаю, что честный ответ (с устремлением времени и расстояния к нулю) меня бы не удовлетворил, даже если бы я его понял. — Дима. ▷

Да, еще я ему говорил, что когда мы якобы «просто видим», то это вовсе не так просто: лучи света отражаются от предмета, преломляются через хрусталик, отпечатываются на сетчатке, палочки и колбочки посылают сигналы в мозг, он их обрабатывает и т. д. А нам кажется, что мы «просто видим», и всё.

Характерно не столько то, какие Дима задает умные вопросы (чаще бывают глупые), сколько область его интересов. Например, Женя, если задает умные вопросы, то совсем другого сорта: «А почему Карабас Барабас дал Буратино пять золотых монет, а Буратино не дал Карабасу Барабасу золотой ключик?»

5. Семантика. Начало сентября 1983. «Папа, а знаешь, откуда произошло слово “тем не менее”?» — Я ответил, что «тем не менее» — это не слово, а три слова: тем—не—менее. «Не менее» — значит «более», а «тем не менее» значит «тем более». «Нет, неправильно, — вдруг сразил меня Дима. — Не обязательно “более”. Может быть более, а может быть и столько же».

Снова о математике

Возвращаемся к нашей основной теме, а вместе с тем и отступаем назад во времени.

1. Задача Гаусса. 3 апреля 1983. Десять дней назад, 23 марта, исполнилось 3 года нашему кружку. А вчера, 2-го апреля, произошло событие, которое мне кажется достаточно важным для того, чтобы его здесь отметить: Дима решил задачу Гаусса, т. е. сложил все числа от 1 до 100.

Произошло это так. Примерно год тому назад я рассказал ему известную историю о том, как Гаусс в возрасте 7 лет в первом классе за одну минуту сложил числа от 1 до 100 (в то время как учитель ожидал, что дети будут заниматься этим весь урок). Дима, конечно, сразу стал спрашивать, как он это сделал. А я, конечно, ему не ответил.

Потом он в течение года раза два или три приставал ко мне: «Ну-у пап... Ну всё-таки — расскажи, как он это сделал...» Но я отказывался. И вот вчера он меня подзывает (а он сейчас, надо сказать, болеет, и, как всегда, именно в этот период у него большой интеллектуальный прогресс — от безделья, видимо) — так во́т, подзывает он меня и объявляет, что решил эту задачу. «Как?» — спрашиваю я. — «Знаешь как? Вот берешь 0 и 100; потом 1 и 50; потом 2 и... т. е. нет, не так! Берешь 0 и 100, потом 1 и 99, потом 2 и 98. И последний раз получится 50 и 50». — «Всё правильно, только одна ошибка: 50 будет всего один раз». — «Так как же тогда делать?» — «Очень просто: всё время по 100, а последний раз 50». — «А-а, понятно». — «Ну так ты уж посчитай тогда, сколько получится, раз так». — «Сейчас». Через минуту снова подзывает меня: «Папа, я когда дохожу до семисот, каждый раз почему-то сбиваюсь». — «Так зачем же ты так считаешь?» — «А как?» — «Ты просто посчитай, сколько будет сотен». — «А-а...»

Я был уверен, что он в чём-нибудь собьется: или неправильно определит количество сотен, или неправильно умножит, или, наконец, забудет про 50. Но нет: всего через минуту он прокричал мне из другой комнаты ответ: 5 050.

Возможно, что впечатление, произведенное на меня этим событием, несколько преувеличено историческими аллюзиями, связью с Гауссом и проч. Тем не менее следует признать, что это всё-таки и в самом деле серьезный успех, в особенности с учетом двух факторов: во-первых, задача решалась устно; во вторых, Диме еще нет 7 лет (осталось полтора месяца). Уместно упомянуть, что формулу суммы арифметической прогрессии проходят в 8-м классе. (А ведь она выводится точно так же! И при этом, надо сказать, мало кто из школьников ее хорошо понимает.) Но, пожалуй, гораздо важнее другое: то, что Дима помнил задачу, обдумывал ее и наконец добрался до решения. То есть он не производит впечатления мальчика, блещущего ярким, бьющим в глаза талантом, но у него есть одно несомненно ценное качество: он всерьез и подолгу задумывается над непонятными вещами и упорно приводит их в систему. По складу характера он меньше похож на Галуа, а больше на таких людей, как Дарвин или Бор. (Я сравниваю не масштаб личности, а ее тип; не величину вектора, а направление.)

Я похвалил его; он со скромной улыбкой заметил, что всё-таки не совсем сам решил задачу — ему помогло то, как мы с ним составляли таблицу для фокуса. Я сказал, что в связи с таким событием хочу сделать ему какой-нибудь подарок. Я долго шарил глазами по полкам, но не смог найти ничего лучше книги Херрмана «Открыватели неба» — истории астрономии с большими, красивыми картинками. Дима довольно равнодушно посмотрел на первую картинку: «Это что, Луна?» — «Да». — «А здесь что нарисовано?» (про вторую картинку). — «Там есть подпись, прочти сам». Но он поленился читать, и, показав на кубик Рубика, сказал: «Я хочу вот что...» — «Хочешь, чтоб я подарил тебе кубик?» — «Нет, я хочу, чтобы ты научил меня его собирать». На том мы и договорились, только я предупредил Диму, что дело это сложное и потому долгое.

Привить ему интерес к книгам пока не удается.

2. Сколько секунд в сутках? 27 апреля 1983. Сегодня Дима меня удивил еще раз, подсчитав (разумеется, устно) количество секунд в сутках: 86 400. Я ему слегка помогал; моя помощь свелась к следующему: во-первых, я сообщил ему, что в сутках 24 часа (и вообще объяснил, что такое сутки). До этого он вычислял, сколько секунд в «дне», а день, по его понятиям, состоял из 12 часов. Во-вторых, я ему подсказал, что если он уже умножил 36 на 12, то не обязательно заново умножать 36 на 24, а можно просто результат умножить на 2. Далее, после действий $60 \cdot 60 = 3\,600$, $36 \cdot 12 = 432$, $432 \cdot 2 = 864$ он забыл, что следует делать дальше, и спросил у меня. На этот раз я отказался отвечать, сказав, что это как раз и есть самое главное в вычислениях — не собственно считать, а понимать, что ты делаешь и зачем. Минуты две Дима восстанавливал ход своих рассуждений и в итоге понял, что осталось умножить результат на 100. Но к этому моменту он забыл сам результат. Это был третий пункт моей помощи: я ему напомнил, что результат 864, а он уже сообщил мне ответ: 86 400. В общем, кажется, можно заключить, что моя система себя оправдала. Под «системой» я понимаю здесь то, что я никогда не учил его специально считать, никогда не вырабатывал никаких «навыков», не тренировал и т. п. На само́м кружке занятий с числами тоже было относительно немного, и даже когда приходилось считать, то я никогда не акцентировал внимание на вычислениях. Вычисляли мы обычно, складывая очки на двух или трех костях, играя в «ним» и т. п., и никогда для того, чтобы «решить пример».

Характерная деталь — даже при самых больших успехах полнейшая ненадежность детей в вычислениях. Недавно Дима умножал 60 на 10 и получил в результате 320!

Через две недели ему будет 7 лет.

3. Сколько жильцов в нашем доме? Еще одна история про вычисления, вовремя не записанная; относится где-нибудь к концу 1982 или к началу 1983 года. В какой-то момент наши мальчики неожиданно осознали, что та гигантская галактика, вокруг которой они гравитируют, как малые планеты — это и есть наш ДОМ. Огромный, полукруглый, каких немало в Ясенево; только чтобы его обойти вокруг, нужно минут двадцать. «Сколько же в нём людей живет?» — спросил Дима. Стали считать: 12 подъездов; в каждом подъезде — по 16 этажей; на каждом этаже — по 4 квартиры. «А в каждой квартире по 4 человека», — это уже Дима сам решил. Нас четверо, значит и везде четверо.

Подробностей вычисления не помню. Помню только, что заняло оно немало времени. Перебираясь, как через бурелом, через ошибки и забытые данные, Дима преследовал свою добычу и в итоге пришел к правильному ответу.

4. Никогда не хвастайтесь детьми! Этот совет, уважаемый читатель, я даю не вам, а себе. Я, вообще-то, хорошо это знаю; но бывает трудно удержаться...

Вскоре после предыдущей истории мы пошли в гости к моей двоюродной сестре Ирине. А надо вам сказать, что она — учительница начальной школы, и притом совершенно замечательная, одна из лучших, кого я знаю. В дальнейшем, когда я сам стал работать со школьниками, я не раз пользовался ее советами. Но и *до* того — и даже когда я еще не был женат — когда бы я ни пришел к ним в дом, речь всегда заходила о школе, и всегда было так увлекательно! Вот и сейчас, естественно, разговор сам собой перешел на то, что Диме скоро в первый класс, и Ира решила проверить его «готовность к школе». Она попросила его сложить 5 и 3. И вот тут меня заело! «А ну-ка, Дима, — говорю, — помножь-ка нам лучше 33 на 17». (Или что-то аналогичное по трудности — точно я не помню.) «Как это?» — спросил Дима недоуменно, как будто впервые в жизни слышал про умножение. Я стал объяснять; он как-то плохо понимал; возможно, на него давило то, что мы в гостях; и отвлекали, конечно же, Ирины ремарки, что я сошел с ума. Ну, так или иначе, он принялся за дело, с грехом пополам и с ошибками помножил 17 на 30, после чего стал еще 3 раза 17 отнимать вместо того чтобы прибавлять. Я ему на это указал; он не сразу понял, а когда понял, забыл *к чему* надо было прибавлять. В общем, он почувствовал, что не выдержал экзамен, и даже расплакался. Стыдно было безумно.

Но если отвлечься от всех этих эмоций, то следует обратить внимание на один важный параметр, который мы редко учитываем: это *мотивация*. В одном случае просто жжет как хочется поскорее узнать, сколько же людей живет в таком огромном доме. В другом — просто умножить и всё, без всякого смысла и толка. Зачем?

5. Этажи. Я спросил у Димы: «Человек поднялся сначала на 5-й этаж, а затем еще на столько же. Где он оказался?» Дима, конечно, тут же ответил: «На 10-м этаже». Я сказал: «Неправильно». Дима задумался. Потом сказал: «Вот я помню, что мама когда-то сказала, что до 5-го этажа ехать столько же, сколько от 5-го этажа до 10-го, а ты тогда сказал маме, что это неправильно, но почему, я так и не понял». Потом он еще некоторое время подумал и сказал, что, наверное, дело в том, что на первый этаж совсем не нужно нисколько подниматься. Однако объяснить, как одно связано с другим, не сумел.

Задача непереводима на французский язык: во Франции этажи считают начиная с нулевого (который называется rez-de-chaussée). Дом, который мы бы назвали двухэтажным, французы называют «дом с этажом».

6. Сто гусей. Лето 1983. Во время одной из прогулок я задал Диме классическую задачу:

> Летит гусь, а навстречу ему стая гусей. Вот гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А гуси ему отвечают: «Нас не сто гусей. Вот если бы нас было столько, да еще столько, да еще пол-столька, да еще четверть-столька, да еще ты, один гусь — вот тогда нас было бы сто гусей». Вопрос: сколько гусей в стае?

По Диминым внешним проявлениям очень трудно угадать, что творится у него внутри. С этой задачей повторилась классическая схема: он ее выслушал и пошел себе дальше, не проявляя никакого интереса. Однако на следующий день утром он, еще лежа в постели, позвал меня и сказал, что решил задачу про гусей, назвав при этом правильный ответ: 36.

7. Про кур-несушек. Сентябрь 1983. Как-то за ужином я задал Диме такую задачу:

> Две курицы сносят два яйца за два дня. Сколько яиц снесут четыре курицы за четыре дня?

Это упрощенный вариант замечательной задачи А. Азимова из рассказа «Escape!»:

> Полторы курицы сносят полтора яйца за полтора дня. Сколько яиц снесут 9 кур за 9 дней? (Чтобы не мучить читателя, скажу правильный ответ: 54.)

На этот раз предыдущая схема выполнилась лишь наполовину: Дима выслушал задачу без всякого интереса, но и потом больше к ней не возвращался. А может, это уже школа влияет? Но о школе — отдельно...

8. Как поделить 17 верблюдов. Сентябрь 1983. Как-то перед сном я рассказал Диме такую арифметическую сказку (уже не помню, где и когда я ее вычитал, но она тоже вполне классическая):

> У одного старика было три сына. Когда он умер, то оставил им в наследство 17 верблюдов. При этом старшему сыну он завещал $\frac{1}{2}$ всего стада, среднему сыну $\frac{1}{3}$, а младшему $\frac{1}{9}$. Стали сыновья делить наследство — и не знают, что делать: ведь 17 пополам не делится! И на 3 части не делится! И на 9 частей 17 верблюдов тоже поделить нельзя. Как тут быть?
>
> Ехал мимо мудрец. Братья обратились к нему за советом. Мудрец выслушал их и сказал: «Давайте я подарю вам своего единственного верблюда. Может быть, тогда ваша задача станет легче». Стало теперь у братьев 18 верблюдов. Старший забрал себе половину (сколько это будет? — правильно!) — 9 верблюдов; средний забрал $\frac{1}{3}$ часть, т. е. 6 верблюдов; младший забрал $\frac{1}{9}$ часть — 2 верблюда. Всего же оказалось $9 + 6 + 2 = 17$ верблюдов: один верблюд оказался лишним, и это был верблюд мудреца! Мудрец забрал обратно своего верблюда, попрощался с братьями и уехал. А братья остались, довольные тем, как ловко им удалось разделить наследство.

Собственно говоря, задачи никакой в этой сказке нет. Это просто беллетризованное утверждение о том, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18},$$

а вовсе не 1, как неявно предполагалось в завещании. Тем не менее детьми, и, в частности, Димой эта история воспринимается как парадокс. Дима был ею совершенно потрясен и всё спрашивал: «Так что, значит 17 всё-таки можно поделить пополам?» Но я молчал, и история так и осталась загадочной.

* * *

А между тем наступил октябрь, а с ним и новый учебный год — я имею в виду не школу, а наш кружок.

Глава 7.

Кружок с мальчиками — последние полгода

Занятие 68. Подвохи календаря

3 октября 1983 (понедельник) $18^{00} - 19^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Немножко странно: никаких поздравлений, никаких «праздничных салютов». Дневник начинается прямо с места в карьер — с первого задания.

Задание 1. Задача о календаре.

Я спросил у Димы: «Сколько тебе лет?» — «Семь». — «А сколько тебе исполнится в будущем году?» — «Восемь». Это пока еще легкий вопрос.

Следующий вопрос Пете: «Сколько тебе лет?» — «Восемь». — «А сколько тебе исполнится в будущем году?» — «Девять». — «А вот Жене будет вопрос потруднее: сколько тебе лет?» — «Семь». — «А сколько тебе исполнится в будущем году?» У Жени день рождения в ноябре, так что 8 лет ему еще успеет исполниться в этом году, а в следующем ему исполнится 9 лет. Женя сначала ошибается и говорит: «Восемь». — «Неверно», — говорю я. «А, правильно, девять», — спохватывается Женя. «Как это?!» — недоумевают Дима и Петя. Потом Петя догадывается. Дима говорит: «Наверное, это так же, как с лифтом». — «Неправильно», — говорю я.

Тут вмешивается Алла и спрашивает: «А вы знаете, когда у Жени день рождения?» Дима не знает. Алла говорит: «Через месяц, в ноябре». Тогда и Дима догадывается до решения и правильно всё объясняет.

А теперь собственно задача. Один мальчик сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет». Как это может быть? Дима выдвигает гипотезу, что это из-за високосных лет. Я ее отвергаю. Начинаются другие гипотезы, иногда ведущие в нужном направлении, и тогда я их поддерживаю. Так постепенно, с моими небольшими подсказками, приходим к правильному ответу:

(а) высказывание произнесено 1 января;

(б) вчера, т. е. 31 декабря, мальчику исполнилось 11 лет;

(в) позавчера, т. е. 30 декабря, ему было еще 10;

(г) когда в этом году наступит 31 декабря (т. е. почти через год), мальчику исполнится 12;

(д) и, наконец, в будущем году ему исполнится 13.

До ответа первый догадывается Петя. Дима всё еще не понимает, что к чему, и я рисую на листке бумаги отрезки-годы, показываю на них дни рождения и проч. Дима говорит: «А-а, а я думал, что в одном году не может быть два день-рождения», — то есть он снова не понял.

◁ Я к тому же еще не понимал разницы между словами «будет 13 лет» и «исполнится 13 лет». Из-за этого мне казалось логичнее говорить, что в следующем году мальчику исполнится 12 лет, а не 13 (ведь ему почти весь год будет 12 лет). Утверждение про 13 лет я признавал верным с натяжкой. Если бы день рождения был 30 декабря, то всё было бы правильно: существовал бы день (31 декабря), когда мальчику было 13 лет. Но когда день рождения 31 декабря, то чтобы утверждение было верным, нужно считать, что в день рождения мальчику уже 13 лет. Это можно, но с натяжкой. — Дима. ▷

Тут вмешивается Петя. Он продолжает мой рисунок влево, показывая, где мальчику исполнилось 10 лет. Тогда до Димы доходит.

Задание 2. Устный вопрос — Фонетика.

Я спросил, из чего состоят слова. Петя ответил: «Из букв». Дима возразил: «А нас вот учили, что слова делятся на слоги». — «А слоги?» — спросил я. — «А слоги — на звуки».

«Значит, — сказал я, — Петя считает, что слова состоят из букв, а Дима — что из звуков».

Петя тут же объяснил разницу между словом написанным и произнесенным. Мы выяснили также, что буквы — это значки для обозначения звуков. А верно ли, что каждый звук обозначается какой-нибудь одной буквой и наоборот? Выяснили на примерах, что неверно.

После этого я задал мальчикам задачу: придумать два таких слова, чтобы они писались одинаково, а читались по-разному.

К сожалению, никто из них ничего не смог придумать даже после того, как я сам привел пример: МУ́КА — МУКА́.

Я сказал, что тогда это будет задание на дом, но все были так шокированы этими словами: «задание на дом» (видимо, столько с ними связано неприятных ассоциаций), что мне пришлось оправдываться и говорить, что пусть просто подумают — вдруг дома придумают.

Задание 3. Программирование.

Я напомнил мальчикам игру с роботом. Объяснил, что, как слова состоят из букв, так и движения роботов состоят из отдельных «простейших» движений; и что как буквы служат для обозначения звуков, как ноты служат для обозначения музыкальных звуков — так же наши квадратики с нарисованными значками служат для обозначения этих простейших движений, а стрелки — для обозначения последовательности действий. (К сожалению, про «проверяемые условия» я ничего столь же четкого не сказал.) После этого я предложил мальчикам сложить произвольную блок-схему, и потом посмотреть, что роботу придется делать.

Они, конечно, сложили довольно громоздкую и нелепую блок-схему. В процессе складывания я обращал их внимание на *синтаксические ошибки*: две стрелки от квадратика, три стрелки от ромбика, тупиковая стрелка и т. п., объясняя каждый раз, почему такую схему робот не сможет понять. Потом мы ставили робота на разные клетки «комнаты», в разных положениях, и мальчики по очереди водили его по доске. Иногда он бессмысленно ерзал по ней, иногда натыкался на стенку и «расшибал нос». Это сопровождалось общим хохотом. Потом ребята заметили, что самое первое условие почему-то всегда посылает на стрелку «нет». Начался ретроградный анализ, в результате которого было найдено положение, дающее ответ «да». После этого робот тотчас же расшиб нос. В самом деле, оказалось (и я показал это ребятам), что алгоритм проверяет, есть ли впереди стена, и *если есть*, то делает шаг вперед.

Мальчики стали блок-схему исправлять. Потом я сам сложил им другую блок-схему: в ней робот ходил от стены к стене и обратно без остановок. Это тоже вызвало всеобщий восторг. Потом мы ее исправили так, чтобы он ходил вокруг комнаты вдоль стен. В общем, всё протекало очень весело и могло бы длиться еще долго, если бы я сам это занятие не прервал.

Чтение.

В заключение я прочитал ребятам первые две главы из книги И. Я. Депмана «Мир чисел».

Занятие 69. Много устных задач

17 октября 1983 (понедельник) 18^{00} – 19^{00} (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устные задачи.

На этом занятии устные задачи затянулись на полчаса, т. к. дети всё требовали еще задач.

(а) Сначала мы рассмотрели еще несколько примеров слов, которые пишутся одинаково, а читаются по-разному (пили, полка, стрелка, стрелок, стрелку и т. п.). Написали фразу: «СТРЕЛОК посмотрел на часы, а на часах нет СТРЕЛОК». Дима предложил последнее слово в этой фразе не писать, а провести стрелку к первому слову. Я сострил: «Провести СТРÉЛКУ к СТРЕЛКУ́!» И еще я напомнил им стишок Б. Заходера:

Вопрос мой прост и краток —
Промолвил носорог:
Что лучше — сорок пяток
Или пяток сорок?
Никто ему на это
Ответа дать не мог.

(б) Второе задание состояло в том, чтобы придумать слова, которые, наоборот, пишутся по-разному, а читаются одинаково (лук—луг, прут—пруд, рот—род, бок—бог и т. п.) В основном, примеры приводил я, лишь Дима случайно наткнулся на пару «вот—вод». И еще я прочитал стих:

Князь скорей царицу будит.
Та как ахнет! «То ли будет. . . »

(в) По поводу первых двух задач мы еще обсуждали разные разности, как то: соотношение между написанием и произнесением (его трудности в английском и французском); перевертыши (дети меня заставили написать несколько перевертышей) и многое другое, чего уже не помню.

(г) Следующая задача Диме была уже известна, поэтому я попросил его помолчать.

Человек поднялся на 5-й этаж, а потом еще на столько же этажей. На каком этаже он оказался?

Петя с Женей, разумеется, не задумываясь ответили: на 10-м. Я стал «спускаться», т. е. вместо 5-го этажа в условии называть 4-й, 3-й и т. д. Первым уловил подвох Женя, однако объяснил он его невнятно и, вместо того, чтобы вычесть единицу, прибавил ее: после 3-го этажа оказался на 7-м. На следующем этапе уже всё понял и Петя — и дал правильный ответ и правильное объяснение (после 2-го этажа мы оказываемся на 3-м). Потом мы еще эти этажи рисовали.

(д) За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга? («Квант», № 5, 1983.)

Дети, конечно же, эту задачу не решили, это просто я поддался на уговоры дать еще задачу. Дима, правда, угадал ответ (2 рубля), но он понял условие примерно так: «За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько же». Мои объяснения он, по его словам, понял с третьего раза.

(е) Мальчики просили еще задач, но я уже истощился. Я стал объяснять, что у меня их нет, так как для такой мелюзги никто задач не придумывает. Дима удивился: «Как? А в школе?» Я ему сказал: «Ну, хорошо: что больше, 5 или 3?» Он как-то весь сразу посерел, съежился, как будто ему сказали гадость, и промямлил: «Ой, нет, не надо...» Но Петя продолжал фантазировать: «Стояло 5 автомобилей; 2 из них уехало; сколько осталось?» Тут и я подхватил: «Горело 5 свечей; 2 из них погасли; сколько осталось?» Ответ очень ребят насмешил (остались как раз те две свечи, что погасли, а остальные три сгорели).

Задание 2. Программирование.

Задача была поставлена так: «Из произвольной клетки доски придти в угол (также произвольный) и там остановиться». Дима тут же на словах изложил правильное решение: нужно идти, перед каждым шагом проверяя, нет ли впереди стены, шагать вперед до стены, а как дойдешь, повернуть в любую сторону, например, налево, и делать то же самое — т. е. идти до стены; дойдя, остановиться.

Однако когда он стал складывать блок-схему, то сделал это неправильно: он поставил ромб проверки стены впереди, затем блок «шаг», а после этого не вернулся к исходному ромбу проверки, а поставил новый (рис. 7.1).

Потом, забыв о ветви «нет», он перешел к ветви «да» и вскоре блок-схему закончил. Женя указал ему на синтаксические ошибки: некоторые стрелки обрывались в никуда. Однако Дима эти замечания проигнорировал и стал свой алгоритм проверять. Через секунду все забыли об ошибках, так как возник более важный вопрос: кто будет первым исполнять роль робота, кто вторым и т. д. Кое-как удалось спор решить.

Димин алгоритм, конечно же, не работал: или приводил не в угол, или вообще прерывался посреди работы (те самые никуда не ведущие стрелки). Мальчики стали его исправлять, на этот раз все втроем. Однако все

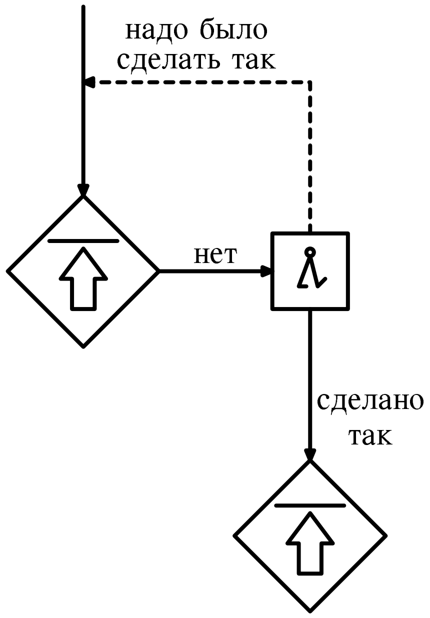


Рис. 7.1. Ошибка в решении.

исправления носили локальный характер: каждый раз, обнаруживая неправильную работу, ребята меняли только соответствующее место в блок-схеме, никак не задумываясь о том, как это отразится на алгоритме в целом.

В результате примерно получаса работы — многочисленных проб, проверок и переделок — получилась до жути неструктурная блок-схема, изображенная на рис. 7.2.

Самое удивительное, что она-таки работала! Проверки из самых разных положений непеременно заводили робота в угол.

Время кончалось, и я с трудом сумел остановить мальчиков, увлекшихся проверками алгоритма. Прочитать им Депмана я опять не успел, и кубики из Scientific American снова не показал. Зато передо мной встала теперь нелегкая задача: убедиться самому, правильно ли работает построенный детьми алгоритм. Я сидел над ним почти час и в результате почти во всём разобрался. Этот алгоритм в самом деле всегда приводит робота в угол *в нашей «комнате»*, так как она имеет нечетные размеры 5×7. То же самое будет, если хотя бы один из размеров нечетный. Но в комнате с обоими четными измерениями, например, 4×6, алгоритм зациклится!

В следующий раз я покажу это ребятам.

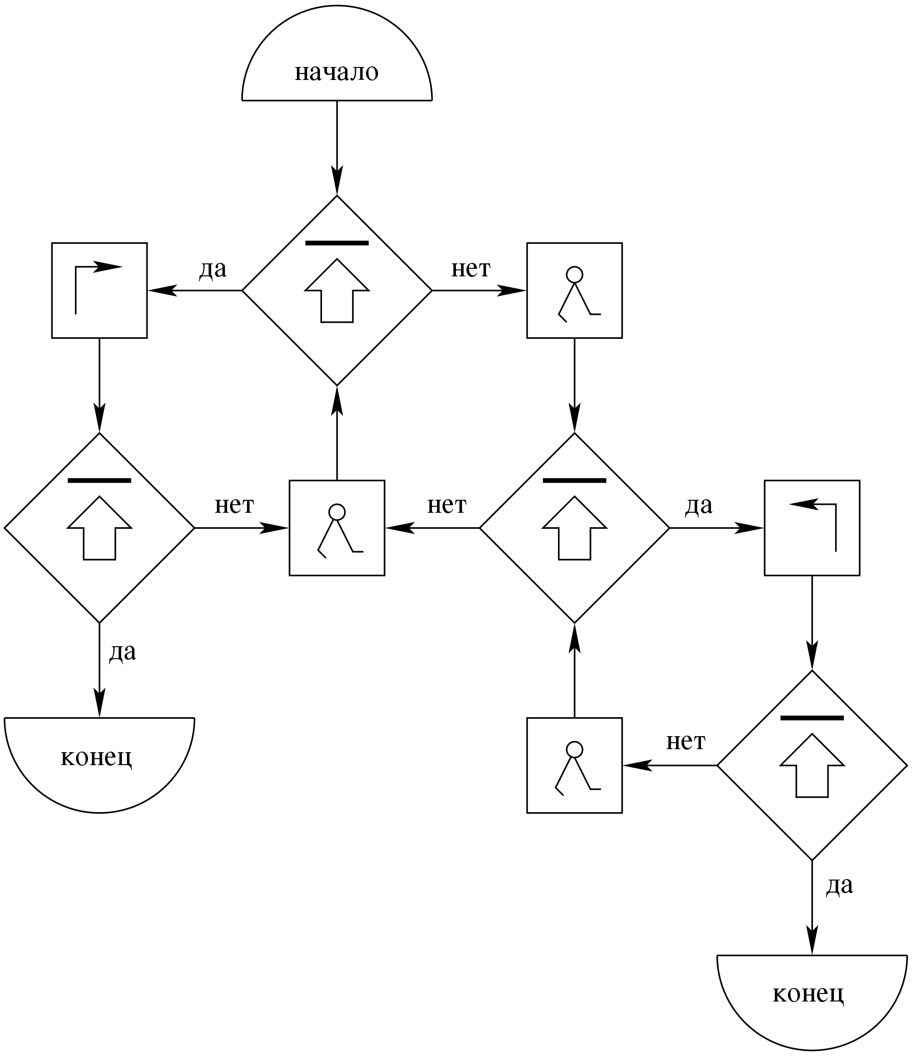


Рис. 7.2. Можно ли понять такую программу? И правильно ли она работает?

Занятие 70. Снова о программах

27 октября 1983 (четверг) $18^{00} - 19^{15}$ (1 час 15 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Программирование.

Как и собирался, я показал ребятам, что их алгоритм в комнате 4×6 приводит к зацикливанию. Это их ничуть не смутило. Обнаружив, что робот поворачивает «не туда», они просто поменяли левый поворот на правый. В другой раз, из другой начальной позиции, оказался «не туда» другой правый поворот (тот, что стоит в блок-схеме слева вверху) — и они так же легко заменили его на левый. Тут, однако, произошла неожиданность (для меня). Оказалось, что новый алгоритм, т. е. тот, что нарисован на рис. 7.2, но с заменой правого поворота на левый, а левого на правый, работает! Мы его пробовали из разных позиций, и с четными, и с нечетными сторонами, — работает, черт возьми! Заводит робота в угол.

Таким образом, все мои воззвания в защиту структурности («можно проще и лучше») потеряли почву под ногами, потому что — что значит лучше, если и так работает?

Я всё же не сдался сразу, тем более, что Дима спросил, а как можно проще? Я достал старую тетрадь, в которой записывал ранее составленные алгоритмы, и показал ребятам их старое решение задачи «дойти до стены и остановиться». (На самом деле, это было не их решение, а подсказанное мной, но дети об этом, конечно, забыли, а я не стал напоминать, так как мне кажется психологически правильнее наши совместные успехи приписывать им.) Я спросил, не может ли это решение им чем-нибудь помочь. Мальчики спокойно и по-деловому, почти как взрослые люди, разобрались в постановке задачи, проверили, как работает алгоритм, а потом Дима, как и в прошлый раз, на словах всё правильно объяснил: нужно сделать так, как в этой программе, потом вместо конца сделать поворот (при этом он заколебался, куда сделать поворот, вправо или влево), а потом сделать то же самое — дойти до стены. «Можно даже делать ту же самую проверку», — вдруг сказал он (т. е. предложил после поворота пойти к тому же ромбику проверки, что и в первый раз). Я уже хотел возражать, но тут вдруг Дима задумался и сказал, что нет, одной проверки всё-таки не хватит, нужны две. Я обрадовался этому заявлению, которое оценил как первое проявление нелокальности мышления. Однако по-настоящему я его соображений не понял (т. е. я не понял, *почему* он считает, что одного ромбика недостаточно), а в той программе, которую он тут же составил, победила всё же «локальность» (рис. 7.3).

Про ромбики проверки Дима сообразил, что их нужно два, а вот про блоки «шаг» того же не сообразил, и поэтому двух следующих друг за другом циклов не сделал. Разумеется, его программа тут же зациклилась. Времени уже было полседьмого, и я решил на этот раз с программированием закончить.

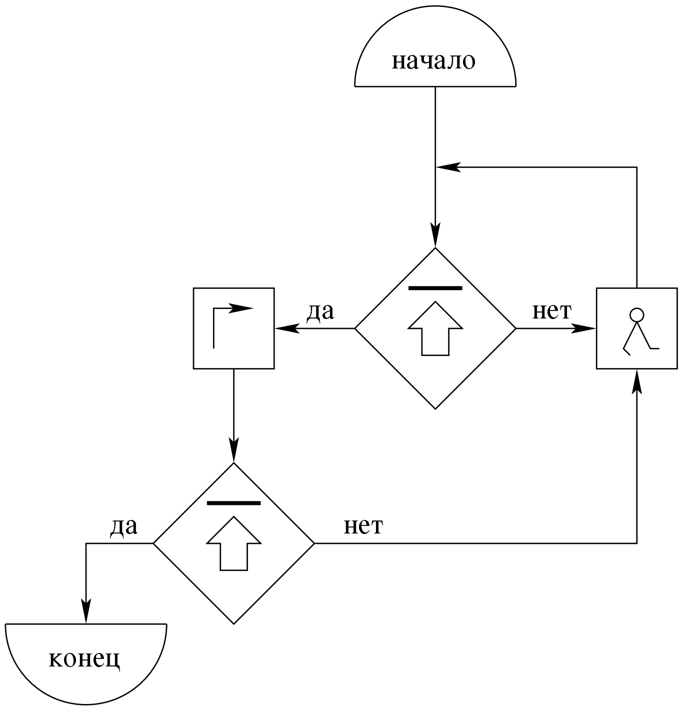


Рис. 7.3. Гораздо лучше — но опять ошибка!

Между прочим, Петя предложил ввести новый значок для поворота на 45°. Я решил ухватиться за эту идею — не для того, чтобы делать повороты, а чтобы делать новые значки, и, в частности, ввести значки для процедур-подпрограмм.

Задание 2. Устные задачи.

Аня, Ася, Ваня и Вася собирали грибы. Аня собрала больше всех, а Ася не меньше всех. Кто собрал больше грибов: девочки или мальчики?

Все хором ответили, что девочки собрали больше.

— А почему?

— Потому что Аня собрала больше всех, — ответил Петя.

— Неправильно!

— Как неправильно?!

— Ответ правильный, а объяснение неправильное.

— И потому, что Ася собрала не меньше всех, — добавил кто-то.

Но теперь, после неправильного ответа Пети, я уже не был уверен, что получил объяснение, а не просто повторение условия задачи. Я стал добиваться объяснений, ужасно долго занудничал и приставал, но так ничего и не добился. В основном мальчики мне приводили примеры, подтверждающие их правоту.

Потом я дал свое объяснение, но никто не понял, чем оно лучше. Детям казалось, что они говорили то же самое.

◁ Я думаю, лучше было бы сформулировать вопрос так: «Могло ли оказаться, что мальчики собрали больше девочек?» Ведь, по сути, из условия ясно, что девочки собрали больше, вопрос только в том, нет ли в этой задаче подвоха. Когда папа дал свое объяснение, я, на самом деле, почувствовал, что оно, в отличие от наших, не оставляет места сомнениям. Но, с другой стороны, ответ-то у нас тоже был правильный... — Дима. ▷

В общем, прошло 20 минут, я весь иззанудничался, совершенно задурил всем голову и сам себя раздражил. В целом у меня осталось ощущение, что занятие было неудачным, и в основном из-за этой задачи.

Задание 3. О шифрах.

Петя с Димой сейчас очень увлекаются составлением шифрованных писем. Я решил подключиться к этой деятельности и впервые за все эти годы дал детям настоящее домашнее задание. Оно состояло в том, чтобы каждый из них составил *шифр*, т. е. табличку, в которой каждой букве алфавита ставится в соответствие какой-то знак (и разным буквам — разные знаки). После этого следует взять из произвольной книги произвольную фразу, зашифровать ее и принести мне — разумеется, не показывая исходной таблицы-шифра. А я уже должен это письмо разгадать.

Задание было воспринято с большим ажиотажем.

Рубикоиды.

Наше обсуждение шифров затянулось, и был уже восьмой час, когда я вспомнил, что уже в третий раз не успеваю показать детям разные модификации кубика Рубика, которые приведены в статье Д. Хофштадтера «Магия математики», журнал «В мире науки» (перевод «Scientific American»).

Поскольку журнал уже пора было отдавать, я решил затянуть кружок еще на 5 минут и показал все картинки.

ШИФРЫ

Все дети сдали мне свои шифры — Петя и Дима уже в воскресенье 30 октября, а Женя принес свое письмо на следующее занятие, 3 ноября. У Пети шифр был самый легкий: он заменил звонкие согласные аналогичными глухими и наоборот, затем твердые гласные аналогичными мягкими и наоборот и т. п. Кроме того, он начал свое послание словами «Из книги ... страница 72». Поэтому его послание я разгадал легко. С Диминым шифром было гораздо труднее, но в итоге я и с ним справился. Очень мне помогла таблица частотности букв из книги А. М. Яглома и И. М. Яглома «Вероятность и информация». Дима стоял рядом и наблюдал за моей работой, так что я «мыслил вслух». Дима ужасно волновался. Женин шифр почему-то оказался еще труднее, так что разгадал я его с огромным трудом, и ушло на это полтора часа. Особую трудность для разгадывания представляли орфографические ошибки — а они оказались в каждом письме.

Теперь у меня главная проблема — как защититься от обрушившегося на меня потока новых шифровок. Уже в тот же день Дима мне принес их три штуки (!!), все записанные разными шифрами. Петя тоже готовит еще одно послание.

◁ Я видел, что папа использует частоту появления букв в шифрованном послании, и старался найти в какой-нибудь книжке фразу, где самая частая буква — не «о». — Дима. ▷

Занятие 71. Школьные задачи... ну, почти

3 ноября 1983 (четверг) $17^{55} - 19^{05}$ (1 час 10 мин.)
(Дима, Женя)

Задание 1. Устные задачи.

Неудача с задачей № 2 из предыдущего занятия навела меня на мысль, что я чересчур увлекся в своем пижонстве и что пора включать в наши занятия обычные школьные или полушкольные задачи.

И я был прав!

Я нашел у себя на полке книжку Труднева «Считай, смекай, отгадывай!» (для 1—3 классов), которая единственная имела подзаголовок «Пособие для учащихся», а не «Пособие для учителя». Там вполне приемлемые, хотя и тривиальные задачки, и я решил пойти по этой книге подряд. На сегодняшнее занятие я запланировал 10 задач. Однако мы застряли уже на третьей...

Третья задача звучала так: «Мама оставила на двух тарелках поровну яблок, а когда она вернулась, на них осталось вот столько яблок (нарисованы две тарелки, на одной 3 яблока, на другой 8). С какой тарелки забрали больше яблок, и *на сколько*?»

На первый вопрос мальчики ответили правильно. А вот на втором произошла загвоздка: ни Дима, ни Женя не смогли ответить, на сколько больше яблок забрали с первой тарелки, чем со второй. Вот так-то! Оказывается, это совершенно не очевидно, что если на 5 яблок меньше осталось, значит, на 5 яблок больше забрали. То есть, главным образом не очевидно, что результат не зависит от того, сколько яблок было исходно. Дима как раз всё допытывался у меня, сколько их там было сначала: хотел подсчитать, сколько забрали с каждой, и потом найти разницу. Я отвечал, что это неизвестно — сколько их было сначала. Потом Женя предположил, что на 5 больше. В качестве объяснения он сказал, что со второй тарелки яблок вообще не брали, потому что на ней больше места нет. Дима стал с ним спорить и предположил, что с первой тарелки забрали на 16 яблок больше. Объяснить свой ответ он никак не мог.

Женя всё же продолжал настаивать на ответе 5. Он сказал: «Раз спрашивается, на сколько больше, значит, надо отнимать». Я предложил ему такую задачу: «В тарелке лежало столько-то яблок. Папа добавил 2 яблока, а мама 4. На сколько яблок стало больше в тарелке?» Мальчики согласились со мной, что в этой задаче тоже спрашивается, «на сколько больше», но числа нужно складывать, а не вычитать.

Наконец, мы дошли до того, что взяли две «тарелки» (листки бумаги), положили на них «яблоки» (фишки) и провели четыре эксперимента. Каждый раз получалось, что ответ 5. Но общего рассуждения я так и не получил. Женя в основном утверждал, что он «так и говорил», не понимая разницы между ответом и решением; Дима тоже не понимал, почему так будет всегда, для любого количества яблок на тарелках. Он даже предположил, что для миллиона яблок может всё быть и не так.

Видимо, Пиаже бы на это сказал, что у ребят не сформировалось еще понимание взаимной обратности сложения и вычитания. А может, что-нибудь другое, более хитрое. В общем, какой-то из законов сохранения явно пока не усвоен.

Задание 2. Вероятностная игра.

Поскольку Петя болен, я решил программирование сегодня пропустить. А Дима меня специально попросил еще раз поиграть в нарисованную здесь игру (рис. 7.4, когда-то мы в нее уже играли — см. стр. 113). Так что как раз сегодня представился удобный случай это сделать.

Жребием решили, кому сидеть посреди, и этим счастливцем оказался я. Я взял себе 10 фишек, а мальчикам раздал по 15. Потом подчеркнул еще

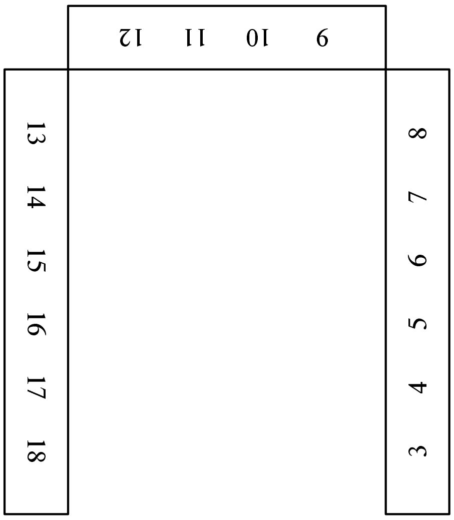


Рис. 7.4. Старая знакомая — планшетка для вероятностной игры.

раз, что у меня и фишек меньше, и выигрывающих клеток меньше — и мы начали играть.

Игра прошла очень оживленно, мальчики играли с большим удовольствием и не хотели останавливаться. Но с точки зрения извлечения из игры какой-нибудь «математической морали», т. е. выводов, занятие прошло не очень успешно. Причина в том, что за первые 15 бросаний Дима ни разу не выиграл и тем самым спустил все свои фишки и разорился. По правилам он должен был сразу же и выйти из игры. Но мне стало его жалко, и когда при очередном бросании выпала «его» сумма, мы с Женей без всяких моих комментариев выдали ему по фишке.

Так и повелось дальше: Дима и Женя периодически разорялись, но каждый раз фишки к ним снова приплывали. В таких условиях, конечно, мне трудно было их победить, тем более что их суммарная вероятность выигрыша больше, чем моя. Кончили мы на том, что у меня было 25 фишек, у Димы — 8, у Жени — 7.

Чтение.

В заключение я прочел им третью главу из книги Депмана. Между прочим, Женя узнал картинку Стоунхенджа и даже сказал: «Вы нам это уже читали». Но потом мы вместе вспомнили, что я этого не читал, а только показывал картинки.

Занятие 72. Подпрограммы

8 ноября 1983 (понедельник) $15^{30} – 16^{30}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Женин шифр.

Я показал Жене расшифровку его письма. Он прочитал текст, но, убедившись в его правильности, еще не сделал отсюда вывода, что я и буквы все расшифровал правильно. Он достал свою таблицу, и мы проверили правильность расшифровки букв.

После этого я немного рассказал ребятам о том, как делается расшифровка.

Задание 1. Устные задачи.

Я продолжал задачи из книжки Труднева: дал еще 5 штук. Никаких ЧП на этот раз не было, за исключением того, что, как выяснилось, такая же книжка есть у Жениного папы, и он даже давал ребятам задачи из нее во время какой-то совместной поездки.

Задание 2. Программирование: знакомимся с подпрограммами.

На этот раз занятие по программированию наконец-то прошло успешно и с толком. Я долго ждал и надеялся, что ребята сами дойдут до понятия подпрограммы. Потом понял, что ждать этого надо, быть может, еще 10 лет. Видимо, эта идея чересчур новаторская. Кроме того, в моем языке явно недостает аппарата, подчеркивающего идею структурности. Одним словом, я не выдержал и сам ввел специальный знак для подпрограмм.

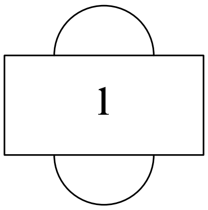


Рис. 7.5. Программа № 1 записывается в специальную тетрадь. Там же записывается, какую операцию эта программа производит (например: «дойти до стены и остановиться»). Когда нам впоследствии захочется использовать ее в качестве подпрограммы в более сложной программе, мы заменяем ее вот таким знаком.

Знак представляет собой прямоугольник 3×6 см с двумя нашлепками-полукругами, символизирующими «начало» и «конец» (рис. 7.5). В специальную тетрадь записываются все составленные нами алгоритмы (вместе с формулировкой задачи). Каждому алгоритму присваивается порядковый номер. В дальнейшем, если в более сложной программе требуется использовать этот алгоритм в качестве ее части, то просто вставляется новый знак, на котором написан номер программы. Номер рекомендуется писать карандашом, чтобы одну и ту же карточку можно было использовать для обозначения разных подпрограмм.

Всё это я объяснил ребятам. Сначала они ничего не понимали, потом разобрались, и мы вместе еще раз решили задачу, которой занимались предыдущие два раза: зайти в угол и остановиться.

При этом использовалась подпрограмма № 1: дойти до стены и остановиться.

Было сделано два варианта программы: один лобовой, другой — чуточку более «умный», т. е. в одном из случаев, когда мы уже после первого прохода оказались в углу, он экономит второй проход. Обе программы показаны на рис. 7.6.

(К сожалению, такой алгоритм, который не делает ни одного шага, если робот уже стоит в углу, и делает только один проход, если робот стоит не в углу, но у стены, чересчур сложен.)

Более простую, лобовую программу мы потом «расшифровали», т. е. заменили оба вхождения подпрограммы на ее «полный текст». Таким образом, получился уже настоящий, полный, без сокращений, текст программы. Он изображен ниже на рис. 7.7.

Полученную программу мы несколько раз проверили, но вскоре стало ясно, что дальнейшие проверки уже не нужны, т. к. действие этой программы совершенно очевидно. Я напомнил ребятам, что обещал им показать более простую программу, решающую задачу, и что вот — это она и есть.

◁ Вся идея с подпрограммами мне совершенно не понравилась. Пока нет подпрограмм, писать программу, приводящую робота в угол, интересно. Нужно думать, пробовать, проверять, изменять и т. д. — это всё достаточно хорошо описано в дневнике. Если же использовать подпрограммы, то почти весь процесс составления программ становится рутинным. Нужно на словах придумать, что делать (дойти до стены, повернуть, опять дойти до стены и остановится) — это интересно. Но потом нужно лезть в тетрадку, читать, что делает какая программа, чтобы найти нужную. (Чтение, конечно можно оставить Пете — он хорошо читает — но тогда я оказываюсь вообще ни при чём.) Вместо того, чтобы брать готовый квадратик, нужно еще писать номер. После этого всего получившуюся программу нельзя ни показать кому-нибудь, ни исполнить без тетрадки. — Дима. ▷

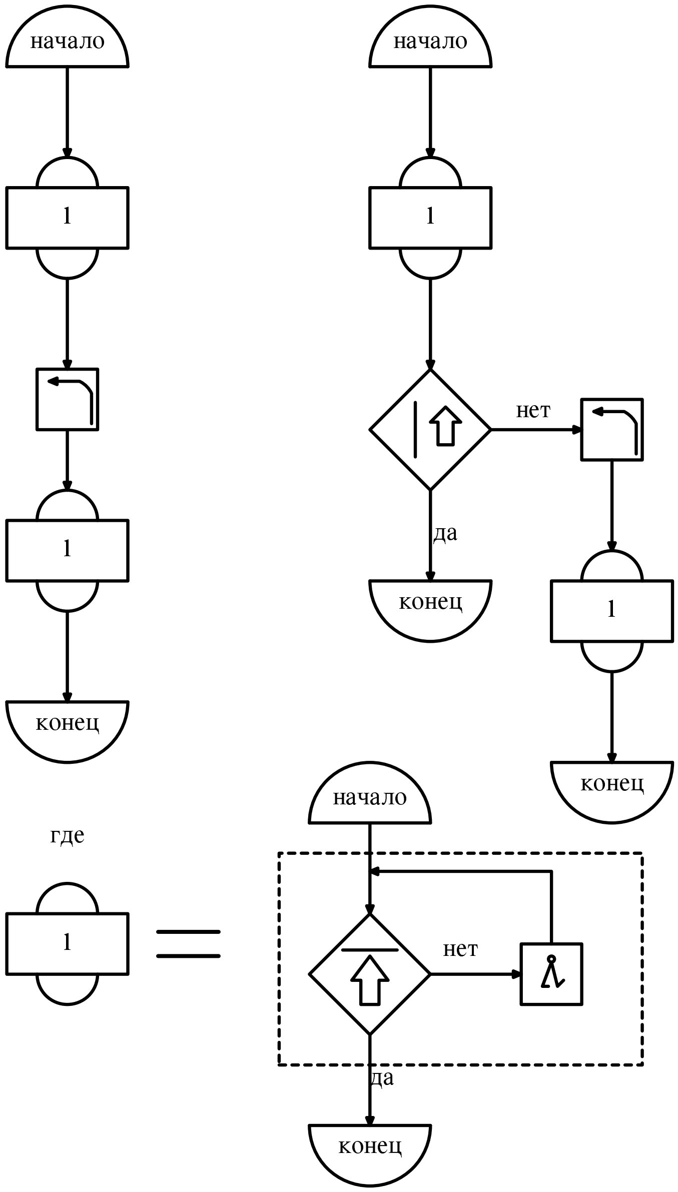


Рис. 7.6. Вверху слева: простейший вариант программы «дойти до угла и остановиться». Вверху справа: чуть более сложный вариант, который в одном из двух случаев сразу определяет, что мы уже находимся в углу. Внизу показана подпрограмма № 1.

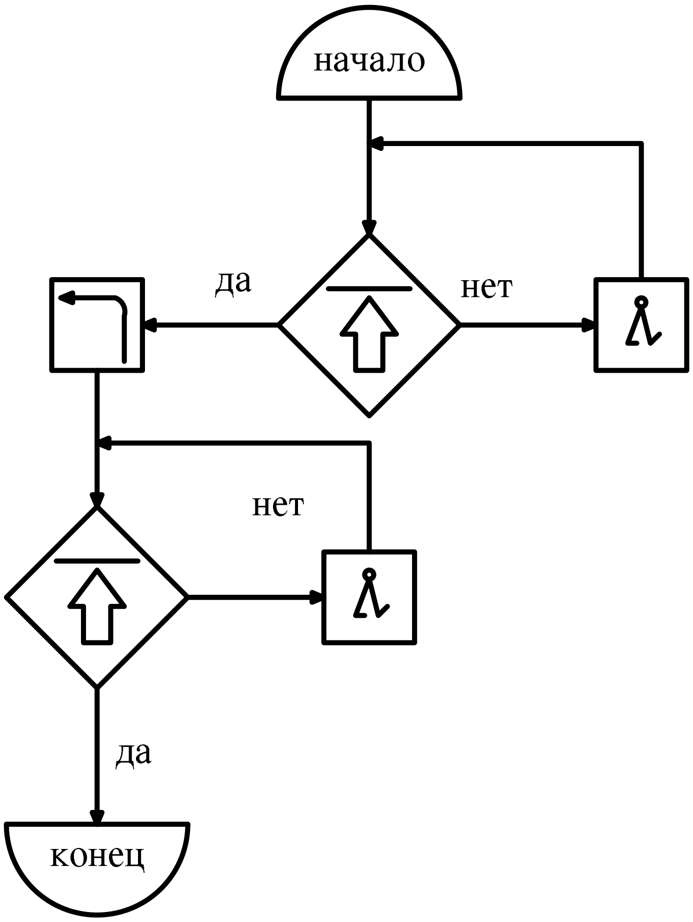


Рис. 7.7. Программа «дойти до угла и остановиться», уже не использующая подпрограмм (т. е. обе подпрограммы «раскрыты»).

В заключение я задал «контрольный вопрос»: а что, по-вашему, делает вот такая программа (рис. 7.8)?

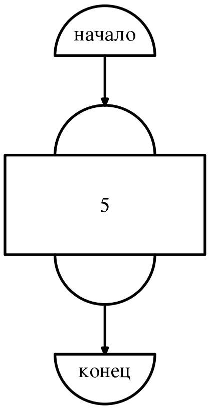


Рис. 7.8. Только что написанная нами программа получает номер 5.

Мальчики бросились смотреть в тетрадь, но в ней оказалось всего 4 программы, а пятой не было. Тогда я спросил: «А как вы думаете, какую программу я запишу туда следующей, под номером 5?» Тут все догадались, что это будет та же самая программа, заводящая робота в угол, которую теперь, таким образом, можно обозначить совсем просто.

Чтение. Депман — половина четвертой главы.

Занятие 73. Нечетные числа и квадраты

17 ноября 1983 (четверг) $18^{00} - 19^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Римские цифры.

В прошлый раз в книжке Депмана мы читали про римские цифры. Поэтому на этом занятии я предложил ребятам записывать этими цифрами разные числа. Мальчики (и я вместе с ними) по очереди придумывали разные числа и записывали их, например,

$$2\,498 = \mathrm{MMCDXCVIII}.$$

Задание 2. Устные задачи. Еще несколько околошкольных задач из книжки Труднева.

Задание 3. Нечетные числа и квадраты.

Этой темой я пытался начать заниматься еще с самого первого занятия этой осенью, но всё не хватало времени. В идеале я бы хотел, чтобы сейчас каждое занятие состояло из 4-х частей: устных задач, программирования, последовательностей чисел и чтения Депмана. Однако никогда мне не удавалось уместить в одно занятие все четыре темы. Но на этот раз я не успел придумать хорошую задачу по программированию, и поэтому нашлось время для занятий числовыми последовательностями. Сначала я спросил у ребят, какие числа они знают. Они не поняли вопроса. Тогда я подсказал: «Ну, четные...» Тут же вспомнили: нечетные, простые... Оказалось, что не все помнят, что такое простые числа; поговорили об этом. Потом я спросил, помнят ли они, что такое квадратные числа. Помнили, но смутно. Мы стали выкладывать квадраты из маленьких пластмассовых кубиков и получающиеся числа записывали. После числа 16 я попросил следующее число назвать устно. Петя сказал, что нужно к каждой стороне добавить по 4 кубика — только он колебался, к двум сторонам их следует добавить или к четырем. Я показал, что получится: квадрат без клеточки (рис. 7.9).

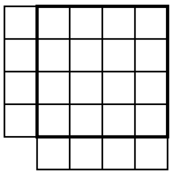


Рис. 7.9. Чтобы из квадрата 4×4 получить квадрат 5×5, добавляем к нему две полоски длины 4. Однако то, что получилось — это еще не совсем квадрат: надо добавить еще одну клеточку.

Тут Дима сообразил, что к 16 следует добавлять не 8, а 9, и сказал ответ: 25. К 25 он уже сразу прибавил правильное число: 11 — и получил 36. Так мы, добавляя последовательно 13, 15, 17, 19, добрались до ста.

Очень забавно, что ту закономерность, к которой я их вел — что сумма нечетных чисел равна квадрату — ребята угадали с самого начала; зато они никак не могли догадаться до того, что мне казалось самоочевидным: что квадрат можно вычислить как произведение $4 \cdot 4$, $5 \cdot 5$ и т. п. Перед нами лежал квадрат 5×5, и я всё спрашивал, как можно подсчитать количество кубиков в нём, а дети всё пересчитывали их разными зигзагами и спиралями, и никак не могли догадаться, что можно взять пять раз по пять. Лишь с большим трудом, упреками-намеками, мне удалось подсказать им эту идею. Я стал спрашивать, чему равно $6 \cdot 6$, $7 \cdot 7$ и т. д., но они уже не вычисляли, а сразу говорили ответ, глядя в свои записи. Их вера в закономерность незыблема. В заключение я задал им на дом такую задачу: найти сумму $1+3+5+7+\ldots+99$. Петя с Женей только хихикали в ответ и говорили: «О-ой, девяносто девять!» Дима отнесся к задаче более серьезно и сказал: «Я похожую задачу уже решал, но не помню, как...» Потом, когда все уже разошлись, он вспомнил, что нужно складывать крайние члены — и тогда каждый раз получится 100: $1+99=100$, $3+97=100$, ... Однако поначалу он ошибся, назвав ответ 5 000. Я сказал: «Неправильно». Некоторое время (минут пять) Дима приставал ко мне, что нет, всё-таки правильно. Потом вдруг догадался: «А-а, здесь будет не пятьдесят раз по сто, а в два раза меньше!» — и тут же выдал ответ: 2 500.

Через несколько дней Дима сам предложил вычислить сумму нечетных чисел от 1 до 199 и получил правильный ответ: 10 000. Я предложил ему досчитать до 999. Он слегка испугался, но стал считать. Деля 500 пополам, он ошибся и получил 270, так что его первоначальный ответ был 270 000. Я сказал: «Неправильно», — и он исправился. Характерно, что его метод не совпадает с тем, на который я пытался натолкнуть ребят во время занятия, т. е. он вычисляет не квадрат. Более точно: я имел в виду для вычисления суммы $1+3+\ldots+(2n-1)$ использовать формулу n^2, а Дима вместо этого использует формулу $2n \cdot \frac{2n}{4}$. Как-то в разговоре я сказал ему, что пытался намекнуть им на другую идею: подсчитать количество чисел в сумме и умножить это число само на себя. Дима обдумал мое утверждение и поразил меня совершенно нетривиальным замечанием: «Твой метод лучше, потому что мой годится не для всех чисел, а только для тех, которые делятся на 4». (Имеется в виду, что $2n$ должно делиться на 4).

Занятие 74. Геометрия чисел

24 ноября 1983 (четверг) $18^{00}-19^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Фокус — лишняя клетка.

Я показал ребятам известный фокус с появлением лишней клетки. В этом фокусе квадрат размером 8×8 (или «шахматная доска») разрезается на 4 части: два треугольника и два четырехугольника, и из них складывается прямоугольник 5×13 (рис. 7.10).

Все операции мы производили физически, т. е. рисовали на бумаге, разрезали, перекладывали и т. п. Попутно обсудили множество полезных вещей: что такое квадратный сантиметр, и что площадь комнаты 8 см $\times$ 8 см будет не 8 см^2, а 64 см^2 (или, как пытались сказать ребята, «квадратный восьми-

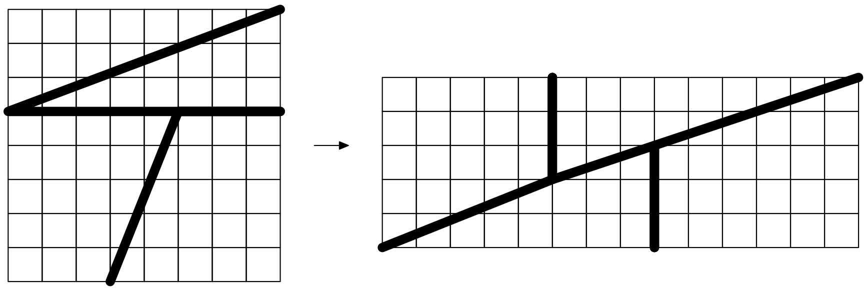


Рис. 7.10. Квадрат площади $8 \cdot 8 = 64$ разрезается на части, и из них складывается прямоугольник площади $5 \cdot 13 = 65$. Откуда взялась лишняя клетка?

сантиметр») и т. п. Видимо, представление о площади уже начинает у них складываться: хотя они и не понимали поначалу, о чём идет речь (когда я стал говорить про площадь) и не догадывались, что площадь комнаты получается произведением сторон, но всё же появлению лишней клетки очень удивились. Секрета я им, конечно, не раскрыл.

◁ Я думал, что мы просто где-то ошиблись в подсчете и много раз пересчитывал разными способами, но ничего не помогало. — Дима. ▷

Очень смешной был момент, когда Дима принялся подсчитывать количество клеток на шахматной доске. Почему-то наиболее естественный способ счета, полосками по 8 клеток, ему в голову не пришел. Сначала он стал считать по спирали (рис. 7.11); естественно, после нескольких витков он сбился, пошел не на ту линию. Петя ему на это указал, возник спор, и в итоге оба забыли, куда двигаться дальше и сколько клеток уже сочтено.

Тогда Дима выбрал другой способ счета — «углами» (рис. 7.12). «В первом уголке, — сказал он, — 16 клеток (два раза по 8), во втором — два раза по семь и т. д.» Я попытался довести до конца с ним это решение, чтобы получить в итоге $16 + 14 + 12 + \ldots + 4 + 2 = 72$ клетки (хотя в конце уже становится очевидно, что вместо 4 должно идти 3, а вместо 2 — 1), но тут он сам заметил ошибку. Далее, идя по нечетным числам, т. е. рассматривая сумму $15 + 13 + 11 + \ldots$, мы вспомнили, что таким образом на прошлом занятии получили квадратные числа, и, достав один из листков, нашли на нём число 64. Потом всё же получили этот ответ последовательным удвоением: $8 \cdot 2 = 16$, $16 \cdot 2 = 32$, $32 \cdot 2 = 64$ (при этом Дима показывал на доске две полоски, затем полдоски, и в итоге всю доску).

Задание 2. Римские цифры. Записали еще несколько чисел римскими цифрами.

Чтение.

Дочитали до конца главу Депмана, в середине которой остановились на позапрошлом занятии. В частности, прочитали про систему записи чисел у майя. Я вот думаю: порешать на эту тему несколько задач в следующий раз, или это уж чрезмерная экзотика?

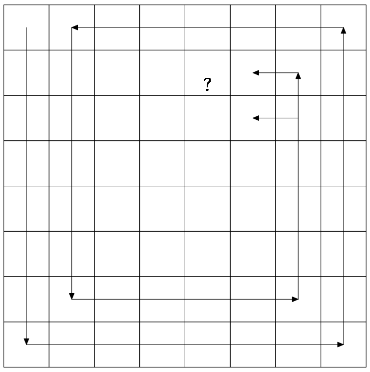


Рис. 7.11. Идя по спирали, конечно, можно сосчитать количество клеток на шахматной доске, но очень легко сбиться.

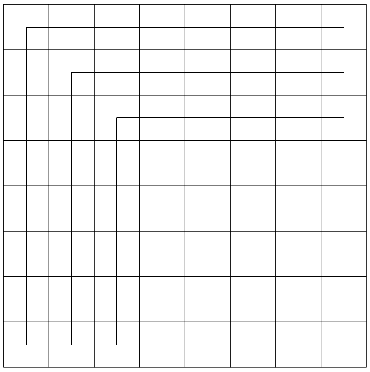


Рис. 7.12. Этот способ всё-таки немножко получше, хотя и он не самый простой.

Занятие 75. Об индейцах майя

5 декабря 1983 (понедельник) $17^{00} - 18^{10}$ (1 час 10 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Сумма нечетных чисел.

Я сказал мальчикам, что задачу о сложении всех нечетных чисел от 1 до 99 Дима решил, и предложил Диме рассказать решение.

К моему огорчению, Дима понес какую-то совершеннейшую ахинею. Он стал говорить так: «Нужно прибавить 1 — получится сто — и поделить на 4 — а потом опять умножить на 100 — и получится 2 500». Естественно, никто ничего не понял. Я стал добиваться объяснений: почему то, почему сё? Он сказал, что он это уже забыл. Потом сказал: «Ну, дай мне бумагу. Вот, берем 199...»

Я понял, что пора его прервать, и стал объяснять сам: складываем $1+99$, затем $3+97$, затем $5+95$ и т. д, каждый раз получаем 100... Мальчики тупо смотрят на меня: видно, что это не подсказывает им никакой идеи. — Значит, если мы подсчитаем, сколько там было сотен, то и узнаем ответ! — Ой-ой-ой, как это? — Ты неправильно объясняешь, — вмешивается Дима. — Нужно поделить на 4 и... — Но почему, почему поделить на 4, ты можешь мне объяснить?! — Потому что когда мы складывали все числа, тогда я делил на два; получалось 5 000. — 5 000?! Вот и неправильно! — Как это неправильно?

«Ничего не понимаю», — заявляют хором бедные Петя и Женя. Вот так мы и возились полчаса, и я с большим трудом втолковал решение Пете. Женя, по-моему, так ничего и не понял, а только хихикал, фыркал, фукал и говорил: «Ой, я опять запутался». А с Димой мы чуть не поругались, так как лившийся из него поток слов никак не удавалось остановить. Неожиданное испытание.

Просто поразительно, насколько умение связно излагать свои идеи находится выше уровнем по сравнению с умением эти идеи открывать.

◁ За пару дней до занятия папа предупредил меня, что попросит рассказать мое решение на кружке. Я немного испугался: на самом деле каждую задачу типа «сложить все числа от 1 до 100» мне приходилось решать заново. Я знал общий принцип: нужно сложить первое число с последним, второе с предпоследним и т. д. Но дальше приходилось напряженно думать: $0+100 = 100$, $1+99 = 100$, $2+98 = 100$, ... Чем кончится этот ряд? Сколько в результате получится сотен? Одним словом, я решил подготовиться и вывел такое правило (на примере суммы $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$):

(а) Прибавить 1 к 99. Получится 100.

(б) Поделить 100 на 4. Получится 25: это число сотен, которые надо складывать.

(в) Умножить 25 на 100. Это и будет ответом.

Аналогичное правило я придумал и для суммы $1 + 2 + \ldots + 100$, да только неверно. После этого я ждал кружка уже не боясь ошибиться... — Дима. ▷

Индейцы майя.

Вторая половина занятия была не столько математическая, сколько историческая. Мы обсудили, почему жители Америки назывались индейцами, проследили по глобусу путь Колумба и Магеллана, потом посмотрели картинки в книгах Р. Кинжалова «Культура древних майя» и Ч. Галленкампа «Майя: загадка исчезнувшей цивилизации» — разные дворцы, пирамиды и проч. Потом в этих же двух книгах, а также в книгах И. Фридриха «История письма» и И. Гельба «Опыт изучения письма» посмотрели образцы рукописей майя. Я рассказал, как были разрушены все эти дворцы, сожжены рукописи, что сейчас их осталось всего четыре, и как поэтому трудно было расшифровать письменность майя. Рассказал, наконец, как в расшифровке помогли вычислительные машины (связав это с нашими занятиями шифрами и объяснив на этом примере, как могла бы помочь вычислительная машина).

После этого мы, наконец, перешли к системе записи чисел. Я решил, что это будет вещь забавная и полезная сразу в нескольких отношениях (это я отвечаю на свои собственные сомнения в конце предыдущего занятия). Во-первых, следует культивировать интерес и желание заниматься *бесполезными* вещами, если они занимательны — это правильный стиль жизни. Во-вторых, нужно приучать детей при чтении книг не просто кивать головой и следовать дальше, веря автору на слово, а вдумываться и разбираться в деталях. Наконец, в-третьих, данная конкретная задача полезна в том отношении, что представляет собой двадцатиричную систему счисления и поэтому может служить хорошим мостиком к изучению систем счисления.

Следует отметить, что мальчики пока не уловили общего принципа записи чисел по системе майя, так что этим надо будет позаниматься еще.

Картинки — фракталы.

В заключение мы рассматривали картинки из потрясающе красивой книги: B. B. Mandelbrot, «The Fractal Geometry of Nature». Сначала я рассказал мальчикам о том, что совсем близко от нас, в 17-м микрорайоне Ясенева живет великий математик Владимир Игоревич Арнольд, которому эту книгу подарил автор. Арнольд дал ее посмотреть Мише Шубину, тот — мне, а я — им (ребятам). Потом сказал, что вычислительные машины умеют не только считать и расшифровывать древние рукописи, но и рисовать. После этого мы рассматривали картинки — многочисленные примеры фракталов из книги.

Игры по дороге в школу.

Сложилась такая традиция, что, когда я провожаю мальчиков (Диму и Петю) в школу, мы играем в разные математические игры. Одну игру придумал сам Дима: он называет три числа и еще три числа, например: $2, 3, 5$ и $7, 1, 4$; требуется придумать такие операции над первой тройкой и над второй, чтобы получить одинаковый результат (в нашем примере $(3+5):2 = 7+1-4$). Потом партнеры меняются местами — второй предлагает числа, а первый подбирает операции. В эту игру мальчики начали играть без меня, так что я о ней узнал только на третий день ее существования. Для второй игры отправной точкой послужила моя задача: «Петя и Дима задумали одно и то же число. Петя поделил его на 2 и отнял 3, а Дима, наоборот, поделил на 3 и отнял 2. В результате они получили одно и то же число. Какое число было задумано?» Теперь мальчики придумывают бесчисленные модификации этой задачи. Вот, например, одна, придуманная Димой: «Я задумал число, поделил на 2, потом прибавил 15 и получил задуманное число. Что я задумал?»

Между прочим, в процессе решения мы обсуждаем вопрос о том, чему равны произведения $2 \cdot 0$, $(-1) \cdot (-1)$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. В первых двух случаях я привел ребят к ответу наводящими вопросами, а в третьем случае Дима догадался до результата сам, объяснив это так: «Если полбуханки хлеба взять полраза, то получится четверть буханки».

Занятие 76. Всё когда-нибудь кончается

12 декабря 1983 (понедельник) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Задачи №№ 12, 13 из книги В. П. Труднева «Считай, смекай, отгадывай».

Перед задачей № 14 мы остановились, так как в ней речь идет о делении с остатком, и мы даже разобрали вопрос о том, какой самый большой остаток может получиться при делении на 4.

Между прочим, оказалось, что Дима определяет остаток от деления 19 на 4 так: 19 на 2 не делится — получаем остаток 1; делим 18 на 2, получается 9; 9 на 2 тоже не делится — получаем в остатке еще 1; значит, остаток равен 2. Он был очень удивлен, что получается по-настоящему не 2, а 3.

Задание 2. Суммирование степеней двойки.

Сначала я рассказал мальчикам легенду об изобретателе шахмат, о том, как он попросил в награду дать ему за первую клетку доски одно пшеничное зернышко, а за каждую следующую — вдвое больше, чем за предыдущую, и что из этого вышло. Потом мы вычисляли и записывали степени двойки. Потом суммировали их, и каждый результат записывали под соответствующим числом (рис. 7.13).

1	2	4	8	16	32	64	128	...
1	3	7	15	31	63	127	...	

Рис. 7.13. В верхнем ряду — степени двойки, в нижнем — их суммы. Видно, что сумма нескольких степеней двойки равна следующей степени минус 1.

Потом я предложил ребятам угадать закономерность. Первый это сделал и объяснил Петя. Следующие несколько сумм (после 511) мы записали, уже не считая. Дима вызвался прямо не сходя с места считать дальше, до 2^{64}. Мне удалось его остановить.

◁ Только на кружке. После кружка я всё-таки решил посчитать и действительно досчитал. Считал несколько дней, на разных листочках. Проверять папа, конечно, не стал, но количество цифр и последняя цифра получились правильные. Когда я досчитал, то уже забыл всё, о чём мы говорили на кружке и решил, что я посчитал только количество зерен на последней клетке. Даже когда папа стал мне напоминать, что это и есть сумма, я не понял. — Дима. ▷

В заключение я связал эту задачу с задачей суммирования нечетных чисел (что, мол, заметив закономерность, можно сильно упростить вычисления).

Задание 3. Числа майя.

На этот раз я не стал делать так, чтобы мальчики сами по очереди придумывали числа, а называл числа сам, причем шел почти подряд по натуральному ряду. Дети усвоили систему лучше, чем в первый раз, но всё же опять не до конца. Между прочим, мы обнаружили неоднозначность в записи чисел. Например, числа 105 и 200, согласно принятой системе, должны записываться одинаково. Возможно, что для записи числа 105 верхнюю палочку нужно рисовать на большем расстоянии от нижней — но это только моя гипотеза (впрочем, мальчики выдвинули такую же).

Индейцы майя записывали числа следующим образом[1]. Единица обозначалась жирной точкой; 2 — две точки, 3 — три точки, 4 — четыре точки. Далее, число 5 обозначалось горизонтальной чертой; 10 — две черты; а, скажем, 13 — две черты и над ними три точки. Наконец, для числа 20 было довольно сложное обозначение: точка, а под ней — человеческий глаз. (Мы с детьми рисовали просто овал.) Глаз вообще исполнял роль нашего нуля; только увеличивал он число не в 10 раз, а в 20. Число, а под ним глаз, означало: взять столько раз по 20. Число, а под ним два глаза — взять столько раз по 400. Вот теперь и спрашивается: глаз и над ним две палочки — это что: 10 раз по 20 или 5 раз по 20 плюс еще 5 (рис. 7.14)?

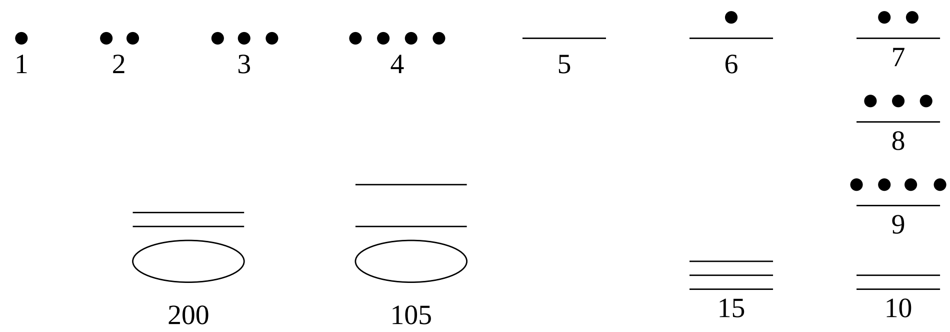


Рис. 7.14. Запись чисел по системе майя. Обозначения для чисел 200 и 105 — гипотетические: разъяснений на этот счет мы ни в каких книгах не нашли.

В этих упражнениях, так же как и в упражнениях на римские цифры, Петя опережает Диму.

Чтение.

Начали читать главу из книги Депмана, посвященную Древнему Египту. Глава большая, так что мы не дошли даже до половины. Попутно я им рассказывал про египетские пирамиды, про семь чудес света и т. п. Мета́, касающиеся дробей, дети не поняли. Заодно я упомянул про расшифровку Ф. Шампольоном египетской письменности, и про то, насколько его задача была труднее моей, — я ведь знал, на каком языке написано письмо, и,

[1]Об устройстве этой системы я прочитал в уже упоминавшейся ранее (стр. 203) книжке Глейзера для IV—VI классов. Позже из более солидных источников я узнал, что на самом деле система записи чисел у майя была несколько сложнее: кроме основания 20 в ней важную роль играло число 18. Но к нашему рассказу это прямого отношения не имеет.

кроме того, расшифровывал буквы, а не иероглифы. Впрочем, исторический экскурс в следующий раз полезно расширить и показать побольше картинок про Египет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прошедшее занятие было последним в этом году (о чём я и объявил ребятам): 14 декабря я уезжаю в командировку почти до Нового года. В следующем году у меня добавится сразу два кружка: один — с девочками, и второй — в школе, в Димином классе. В этих условиях у меня вряд ли хватит энергии продолжать дневник. К тому же по его содержанию видно, что наши занятия всё больше и больше переходят на рельсы обычного школьного кружка со стандартными темами и, следовательно, постепенно теряют свою уникальность. Так что я решил поступить вот как. Данный дневник я сегодня вести заканчиваю, и это его последняя страница.

Зато, по-видимому, следует переключиться на дневник про девочек, и особенно тщательно записать начальный этап, не отраженный в этом дневнике. Вот таковы планы.

13 декабря 1983 года.

Глава 8.

В школе и дома

Наш кружок собирался еще несколько раз, но записей об этом почти не осталось. Ниже я вскользь упоминаю о нескольких задачах, которые показались мне достаточно интересными. Однако с Димой мы продолжали заниматься — без всякого ритма и системы, часто урывками, но на небольшую тетрадочку набралось.

Во втором разделе этой главы — несколько разрозненных историй и наблюдений, касающихся первых классов в двух разных школах.

Беседы о математике, перемежающиеся грустными рассуждениями о школе

3 октября 1983 года. После первого месяца в школе.

[Записано после 68-го занятия (стр. 235) — когда мы решали задачу о мальчике, которому в будущем году исполнится 13 лет.]

Мне почему-то до самого последнего времени казалось, что на Диму школа не подействует так, как она действует на других ребят (страшно применять к нему слово «отупляюще», поэтому скажем так: «негативно»). Однако в последнее время я начинаю замечать у него некоторые сбои.

Так, недавно, он у меня спросил: «Папа, а 4 недели — это сколько дней? Нужно к 228 четыре раза прибавить по 7 или четыре раза отнять?» Я так и не смог у него добиться, откуда он взял число 228.

В другой раз мы вместе шли из школы и вычисляли, может ли один учитель вести уроки физкультуры во всей школе. Он очень плохо понимал, что и зачем надо делать, не мог сосчитать количество уроков в неделе, не знал потом, следует делить на 2 или умножать (2 урока в неделю в классе) и т. п.

Вот и сегодня он тоже был не на высоте. И не в том дело, что он соображал медленнее, чем раньше, а в том, что его поток гипотез был менее интенсивен, чем обычно, и они были менее разнообразны.

Характерен в этом отношении рассказ Гали З. о своем сыне. В их учебнике (кажется, второго класса) есть так называемые «задачи нестандартного содержания». В течение года ни одну из этих задач Лёва решить не мог. Однако началось лето, и через две недели каникул он легко решил все задачи до единой: что-то его «отпустило».

Ноябрь 1983. Школа наводит ужас.

[Записано в те дни, когда Дима сложил все нечетные числа сначала от 1 до 99, а потом от 1 до 999.]

Так случилось, что в день занятия кружка (17 ноября) Дима поздно вернулся из школы, а погода была очень хорошая, и я после обеда выпустил его погулять. Поэтому уроки он стал делать после кружка, и контраст между его успехами на кружке и в школе оказался особенно ярким. Дело в том, что оценки первоклассникам начинают ставить только со второй четверти, т. е. с 10 ноября. За прошедшую неделю Дима получил четыре оценки по математике. Вот они в порядке поступления: 3−, 2, 3, 2. Как раз в четверг, 17-го, Дима получил свою тетрадь домой: мы как родители двоечника должны были расписаться возле каждой оценки, чтобы показать, что мы с его успехами ознакомлены.

В чём же дело? Я внимательно просмотрел его тетрадь. Исписано около трети. Прежде всего хочется отметить, что в ней нет ни одной — подчеркиваю, ни одной — арифметической ошибки. Я был даже удивлен: я привык, что в счете он нередко ошибается. Наивысшая оценка — тройка — стоит за решение «примеров», т. е. за чистые вычисления типа: $9 - 4 - 3 = 2$. Здесь претензии только к почерку. Написал бы красиво — вполне мог бы получить 5. Остальные оценки — за задачи, и с ними дело хуже. Конечно же, все задачи решены правильно — этот факт я выношу за скобки (и, видимо, учительница его выносит за скобки тоже). Однако *запись* — вот в чём корень зла! Есть, конечно, замечания и по почерку, но не они главное. Замечания другого рода таковы (я смешиваю в одну кучу «ошибки» из разных задач): слово «задача» написано с маленькой буквы; после него не стоит точка; слово «ответ» тоже с маленькой буквы; в другом месте вместо «ответ» написано сокращенно «от.» После слова «ответ» следует ставить двоеточие; сначала Дима этого не заметил, потом после моего вопроса, заданного дома, специально в школе посмотрел; оказалось, двоеточие таки нужно. Но на следующий раз он поставил его не там — написал «Ответ 6 : р.». (Какой смысл для него в этом знаке?) Тонким моментом является также употребление именованных величин (а они у них сейчас таковы во всех задачах). Допустим, нужно сложить 3 и 4 коровы. Тогда в так называемой *краткой записи условия задачи* нужно написать соответственно 3 к. и 4 к., например:

$$\left.\begin{array}{lcl}\text{На лугу} & - & 3\,\text{к.}\\ \text{На поле} & - & 4\,\text{к.}\end{array}\right]\ ?$$

Затем, в момент выполнения действия, размерность исчезает: $3 + 4 = \ldots$ Когда же получается результат, то размерность появляется снова — но на этот раз обязательно в скобках: $\ldots = 7$ (к.). (В принципе — вполне разумно, иначе слева стояли бы безразмерные величины, а справа — уже коровы. Но что понимают в этом первоклашки?) Наконец, в ответе это самое «к.» пишется опять без скобок. Дима поначалу не разобрался в этой системе и иногда писал лишние скобки где не надо, а иногда забывал поставить размерность вообще. Трудности вызывает также место для вопросительного знака. Если в задаче спрашивается, сколько штук чего-то у кого-то, то и знак вопроса ставится в той же строчке, например:

На поле — ? — на 1 к. больше.

Если же требуется узнать суммарное количество, то к обеим строчкам ставится квадратная скобка, и знак вопроса после нее — как в примере выше. В этом случае, кстати, сразу ясно, что задача — на сложение. Однако Дима этой условности тоже не уловил. Он не приписывал квадратной скобке никакого определенного смысла, или понимал ее интуитивно как то, что «требуется что-то узнать». В результате он иногда навешивал эту скобку и на задачи на вычитание (это уже было не в школьной тетради, а в наших тренировках).

Одним словом, как читатель уже догадался, мы приступили к тренировкам. Алла задала Диме такую задачу: «У Светы было 8 ромашек; 3 она подарила другой девочке; сколько ромашек у нее осталось?» (Это после наших-то прогрессий!) Требовалось, конечно, не решить эту задачу, а правильно записать условие и решение.

Сначала всё шло гладко: слово «Задача» он написал с большой буквы, и точку не забыл. Дальше возник спор; я считал, что следует писать: «У Светы — 8 р.», а Дима утверждал, что они всегда в таких случаях пишут «Света — 8 р.» Вопрос отнюдь не праздный — ведь и за гораздо меньшие отклонения от формы оценка снижается. Мне это показалось странным, но, в самом деле, предыдущие задачи были записаны именно так. Я отступил, хотя и не был твердо уверен в его правоте. Написав первую строчку, Дима надолго задумался, и тут я *впервые в жизни* услыхал от него то, что, думал, не услышу вообще никогда: «*Мы таких задач еще не решали*». — Что такое?!! Оказывается, непонятно, как записать вторую строчку условия. Если написать:

Света — ? — на 3 р. меньше.

то это вроде бы противоречит первой строчке. «Нужно обязательно, чтобы *у кого-то другого* было меньше», — объяснил нам Дима. Внутренне схватившись кто за голову, кто за сердце, мы с Аллой стали менять условие: «... а у Гали на 3 ромашки меньше». Это, однако, не ликвидировало всех вопросов. Нужно ли писать тире *после* вопросительного знака или только перед ним? Следует ли писать «На 3 р. меньше.» с большой буквы? Я чувствовал себя совершенно беспомощным. А ведь одновременно нужно писать красиво, аккуратно, *письменными буквами* — в точности такими, каким их учат, но на бумаге в клетку, а не в линейку. Можно лишь удивляться, что за всеми этими проблемами Дима всё же сумел правильно вычесть 3 из 8. Между прочим, считать их учат тоже не лишь бы как. «Вот, например, нужно сложить 7 и 3, — рассказывает Дима. — Но если ты сложишь $7+3$, это будет неправильно. Нужно складывать так: $7+2+1$. (Я в этот момент ему не поверил, стал спорить, но дальнейшие примеры убедили меня в том, что он говорил правду.) А если нужно сложить 6 и 4, то нужно складывать $6+2+2$. Вот, например, Ольга Ильинична спрашивает: «Сколько получилось?» — 10. — «А как ты считал?» — $6+4$. — «Садись, неправильно. А ты как считал?» — $6+1+1+1+1$. — «Садись, неправильно! А ты?» — $6+2+2$. — «Правильно!». — «Ну, а ты как считаешь?» — спросила Алла. — «Ну, я вообще-то считаю $6+4$, но когда у меня спрашивают, отвечаю, что считал $6+2+2$», — сказал Дима и сам засмеялся от того, какой он хитрец.

Видимо, методика обучения счету состоит в том, чтобы идти по натуральному ряду с шагом 1 или 2. Возможно, для тех детей, которые еще совсем не умеют считать, это и имеет какой-то смысл. Но это тупое чудовище (я имею в виду школу — учителя́ в этом не виноваты) заставляет всех повиноваться своим примитивным принципам. И некуда деться!

30 декабря 1983 года. Умножение столбиком.

Научил Диму умножать и складывать столбиком. Подсчитали количество секунд в году (точнее, в 365 сутках). Теперь он каждый день сам придумывает себе задачи на умножение и решает их. Много ошибок.

2 января 1984 года. Двоичная система счисления.

По дороге в кино и обратно освоили двоичную систему счисления. Предложение исходило от Димы: система майя не понравилась ему тем, что добавление «глаза» увеличивает число сразу в 20 раз (слишком много). Было бы проще, если бы добавление нуля увеличивало число, скажем, в 2 раза. Однако он не догадался сам, что для такой системы требуются всего две цифры: для этого потребовались наводящие вопросы.

Потом всю дорогу представляли все числа в двоичной системе, а также подмечали разные закономерности (например, какие числа записываются одними единицами).

Вечером он толковал Алле, что бывает еще троичная, «четыричная» и пятеричная системы и т. д., хотя у нас с ним разговора об этом не было. Про вычислительные машины я ему рассказал.

[Вопросы о *целеполагании* обладают собственной логикой; поэтому так трудно передать другому человеку свою систему ценностей. Вообразите себе некое общество, в котором уважают только людей с большими портфелями — и чем больше портфель, тем больше уважение. Вы хотите убедить членов этого сообщества в том, что их критерий уважения неправилен. Но сначала вам нужно добиться того, чтобы они вообще стали вас слушать, чтобы ваше мнение оказалось для них достаточно авторитетным. А для этого вам скорее всего придется сначала обзавестись большим портфелем.

В роли такого вот сообщества до некоторой степени выступаю я сам. Я колебался: следует ли заниматься очевидно бесполезными вещами? Например, записывать числа по системе майя? Возможно, еще более выходящим за рамки разумного выглядел этот сюжет для читателя. И вот — ответ на мои сомнения найден? «Да, заниматься бесполезным можно и нужно, потому что это... полезно! Ведь именно система майя натолкнула Диму на идею двоичной системы. А уж полезность-то двоичной системы никто отрицать не может». Остается только неясным, хорошую ли я службу сослужил самому себе таким рассуждением или наоборот. Укрепил ли я весомым аргументом идею о том, что в жизни сто́ит заниматься бесполезными вещами, или только расшатал ее еще больше?]

5 февраля 1984 года. Я репетиторствую.

Дима около часа просидел у меня на уроке с десятиклассником. Перед этим заглянул в список ответов. Там стояло: $x < -2$, $x > 0$. Он спросил, как это так может быть, чтобы x было меньше -2 и больше 0. Я объяснил. Тогда он на нескольких примерах уточнил, правильно ли он понял мое объяснение; в том числе спросил про граничные значения -2 и 0.

Сказал: «Значит, из целых чисел только три не годятся?» — «Какие?» — «-2, -1 и 0». — «Правильно. А из дробных?» — «Ну, дробных можно сколько хочешь придумать».

Таким образом, он понял этот материал лучше, чем мой абитуриент Дима П.

11 февраля 1984 года. Площади разных фигур. (На одном из занятий кружка.)

Обсуждали разные разности, касающиеся площадей, например, разбиение единицы площади на более мелкие части. Среди прочего, взвешивали разные вырезанные из бумаги фигуры на аптекарских весах. Потом занялись определением площади прямоугольного треугольника. Я, разумеется, в конце объяснил стандартный способ — достраивание до прямоугольника. Но перед этим мальчики предложили свой собственный метод, несколько вычурный, но тоже дающий правильный результат (рис. 8.1).

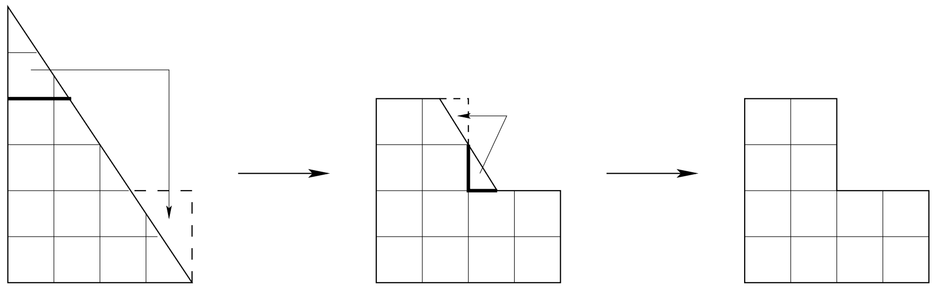


Рис. 8.1. Несколько экзотический, но вполне работающий способ определения площади прямоугольного треугольника.

16 февраля 1984 года. Странно: двоичная система проще дробей?

Вчера и сегодня Дима занимался тем, что перемножал числа в двоичной системе (в столбик), а затем проверял результат в десятичной системе. Занятие это он себе придумал сам. Умножал, скажем, 10 на 100 или 1 000 на 1 000, а потом проверял, получится ли 1 000 или, соответственно, 1 000 000. Существенно то, что он совершенно самостоятельно понял, как при сложении большого числа единиц переносить их сразу в несколько разрядов («$1+1+1+1$ — пишем 0, сюда запоминаем 0, а сюда 1»). Ошибки, однако, допускал, забывая, что в какой разряд запомнил. Я его научил перенесенные знаки записывать снизу.

Сегодня обсуждали связь двоичной системы с восьмеричной и с шестнадцатеричной. Он тоже всё понял. А вот сравнить по величине $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$ никак не может. Слишком формальный стиль мышления: всё время пытается придумать, какие действия надо совершить, а в содержание понятия не вдумывается.

20 февраля 1984 года. Квадрат площадью в 2 клетки. (Снова на кружке.)

На этот раз меня удивил Петя. Я дал такую задачу: построить квадрат площадью ровно в 2 клеточки. Сначала Дима пробовал $(1 + \frac{1}{2})^2$ (рис. 8.2 слева) и $(1 + \frac{1}{4})^2$ (рис. 8.2 в центре); оба раза правильно подсчитал площадь и понял, что 2 не получается. Я думал — вот я сейчас поражу ребят своим решением! Но тут почти тотчас же Петя взял и нарисовал правильный ответ (рис. 8.2 справа)[1].

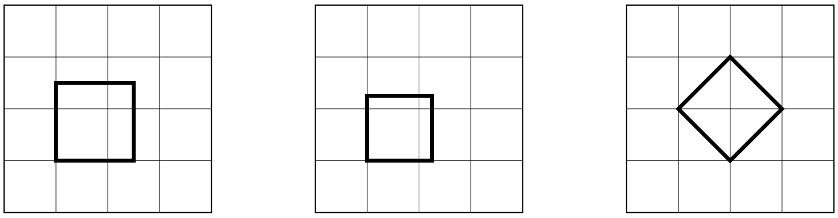


Рис. 8.2. Первая попытка (слева): сторона квадрата равняется $1\frac{1}{2}$, а площадь складывается из одной целой клетки, двух половинок и еще одной четверти, т. е. равна $2\frac{1}{4}$. Вторая попытка (в центре): сторона равна $1\frac{1}{4}$, а площадь получается равной $1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$. (Рассмотрите сами квадрат со стороной $1\frac{1}{3}$.) Наконец, площадь квадрата, показанного справа, равняется в точности двум клеткам: видно, что он состоит из четырех половинок клетки, имеющих форму треугольника.

[1]Задача о площадях «косых квадратов» оказалась необычайно богатой, но более подходящей для детей постарше. В 1989 году в детском компьютерном лагере в Переславле-Залесском мы с группой ребят 10—14 лет прозанимались этой темой две недели. Она сама собой вывела нас сначала на теорему Пифагора, потом на задачу Эйлера о том, когда треугольные числа равны квадратным (нужно, чтобы из одного и того же числа камешков можно было сложить треугольник и квадрат), отсюда к уравнению Пелля (решить в целых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$) и, наконец, к конкурсу на наибольшую пифагорову тройку чисел (целые числа a, b, c такие, что $a^2 + b^2 = c^2$). Конкурс выиграл, как ни странно, мальчик Митя 9-ти лет. Позже, по мотивам этих занятий, Митя задал нам вопрос о том, можно ли сложить из одного и того же количества шаров пирамиду и куб. Эта задача сводится к совсем уж серьезной математике, которую даже в университете не проходят — к арифметике эллиптических кривых. После некоторых усилий одному из преподавателей удалось найти ссылку на статью в научном журнале, где доказывалось, что кроме 1 таких чисел нет.

На днях мы с Димой обсуждали иррациональность $\sqrt{2}$. Он задавал очень разумные вопросы: «Значит, число $\sqrt{2}-1$ тоже такое? А $2\sqrt{2}$?» И тому подобное.

◁ Папа мне рассказывал доказательство, но я так и не понял. Во-первых, оно мне показалось слишком длинным, а, во-вторых, я раньше никогда не встречал доказательств от противного. Предположили, что дробь несократимая, потом как-то туманно вывели, что всё-таки сократимая. Вывод из этого почему-то, что такой дроби не существует. — Дима. ▷

Чет-нечет с умножением.

На том же занятии играли в такую игру: выкидывали пальцы и считали произведение; если оно было четным, выигрывал я, а если нечетным, выигрывал мой противник. Естественно, всегда выигрывал я. Дима сразу догадался (а может знал — не помню), Петя догадался очень нескоро, а Женя вообще мало что понимал.

8 марта 1984 года. Деление уголком.

Сегодня научил Диму делить уголком. Пока он усвоил метод не очень твердо. К концу дня выяснилось, что я забыл научить его вычитать (т. е. занимать из старших разрядов в младшие — всё остальное и так ясно). Он придумал свой способ: увеличивал уменьшаемое и вычитаемое на столько, чтобы в младшем разряде цифра у уменьшаемого была больше (например, $50-47=57-54$).

23—25 марта 1984 года. Системы счисления.

Закончилась третья четверть, и Дима получил по математике четверку (вообще у него в этой четверти единственная пятерка — по физкультуре, а остальные — четверки). У его соседа Кости — тоже четверка по математике (единственная; все остальные — пятерки). Дима мне рассказывал, что на последней контрольной Костя у него спрашивал, сколько будет $12-6$. Будучи примерным учеником, Дима не ответил, и Костя, после некоторого размышления, написал: $12-6=8$.

У меня возникла идея новой задачи, и я спросил у Димы, в какой системе счисления будет верно равенство $12-6=8$. Он сразу сказал, что система нужна не менее, чем девятеричная, чтобы была цифра 8. Дальше он долго говорил «не знаю, не знаю...», повторив эти слова множество раз. К сожалению, в последнее время он всегда с этого начинает: сначала долго убеждает себя и всех, что задача у него не получится, а уж потом только ее решает.

После того, как я его пристыдил как следует, задачу он всё-таки решил и назвал двенадцатеричную систему счисления. «Так что, — сказал я, —

наверное, Костя просто решал задачу в двенадцатеричной системе счисления».

Дима потребовал еще несколько таких же задач и решил их. Следующие два дня он придумывал для меня множество аналогичных задач; например: в какой системе верно равенство

$$22 - 7 = 1Д\,?$$

(В системах счисления с основанием, бо́льшим 10, он недостающие цифры обозначал буквами русского алфавита.) Ответ: в системе по основанию 19. Быстрота моих ответов очень удивляла его: сам он решает задачи подбором.

На некотором этапе у нас возник вопрос, почему некоторые равенства верны во всех системах счисления, в которых они имеют смысл (т. е. в которых существуют нужные цифры: например, $32+23=55$ в любой системе, начиная с шестеричной), а другие верны только в одной определенной системе счисления. Первоначальная идея была у Димы какой-то совершенно нелепой и не связанной с существом дела. Но потом он всё-таки догадался, что всё зависит от того, происходит ли переход из одного разряда в другой или же действия выполняются независимо в каждом из разрядов.

Когда он всё правильно объяснил, я не удержался и сказал обнадеживающим тоном: «Молодец! Может быть, еще вытянешь на пятерку по математике».

Март, апрель, май.

Все эти месяцы Дима постоянно клянчил у меня микрокалькулятор и что-то на нём считал. По дороге он усвоил и продолжает усваивать много разных понятий. Сначала усвоил, что такое десятичная дробь. Затем узнал операцию возведения в (целую) степень. Узнал число π и что оно означает. Затем по его просьбе я ему рассказал, что такое градусное и радианное измерение углов. Потом объяснил, что такое синус. «А где обратный синус?» — спросил он таким само собой разумеющимся тоном, как будто идея обратной функции уже давным-давно ему известна.

Представление числа в виде пары (мантисса, порядок) пока ему не дается.

Иногда он решал и содержательно осмысленные задачи, например, «сколько секунд в году?» или «сколько дней я прожил?», но это бывало редко. Очень много он занимался задачей о «числах-градинах»[2] (см. журнал

[2]Эта задача впоследствии стала очень знаменитой и получила множество разнообразных названий (например, «сиракузская задача»). По сей день она так и остается нерешенной.

«В мире науки», № 3, 1984). Речь идет о последовательности u_n, заданной рекуррентным соотношением:

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2, & \text{если } u_n \text{ четно}, \\ 3u_n + 1, & \text{если } u_n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Если начать с числа $u_0 = 1$, мы попадем в цикл $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Поэтому естественно ввести такое правило: попав в 1, останавливаемся. Посмотрим, например, что будет, если мы начнем с числа 7:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Если начать с числа 27, то придется сделать уже более сотни шагов; наша последовательность попадает в далекие тысячи, но потом всё равно возвращается обратно и приходит в число 1. Нерешенная проблема как раз в том и состоит, чтобы выяснить, *попадем ли мы в 1, начиная с любого числа.* Вот этот факт Дима и проверял для разных начальных значений.[3]

В остальном его занятия носили довольно бессмысленный характер. Например, десятки раз он проделывал одно и то же вычисление степеней двойки.

На прогулках, когда он приставал ко мне, чтобы я дал ему какую-нибудь задачку, я в основном давал ему задачи про дроби. Сначала дело шло очень туго, или, правильнее сказать, совсем не шло. Потом он что-то начал соображать и постепенно дошел до такого уровня, что стал почти всегда давать правильные ответы на задачи такого типа как $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$ и т. п.

Однако, какие он при этом производит действия, я не знаю, а объяснений его не понимаю. Такое впечатление, что он каждый раз поступает по-разному и общей идеи приведения к общему знаменателю пока не понял (т. е. не придумал).

$\lhd$ Если я правильно помню, то я фактически искал общий знаменатель. А именно: я брал $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ от любого числа, от которого это легко — например, от 6 или 12, вычитал одно из другого, и снова делил на это число. Почему получится всегда одно и то же, я не знал, но знал по опыту, что всегда получается правильно (т. е. папа говорит, что правильно). Число это я просто подбирал, но старался, чтобы оно было поменьше. Поэтому чаще всего оно было действительно наименьшим общим знаменателем. — Дима. $\rhd$

После одной из просьб дать ему задачку я сунул ему книгу Труднева и сказал, чтобы он сам себе искал задачки. Несколько дней он решал подряд задачи из этой книги, потом ему всё же надоело. Видимо, важна не только и даже не столько математика, сколько «математическое общение».

[3] С помощью компьютера проверено, что эта гипотеза верна по крайней мере до $2,7 \times 10^{16}$.

И еще во время болезни он попросил показать ему учебник математики 2-го класса. Я принес, а также 3-го и 4-го. Но он их просмотрел довольно лениво, нигде не вдумываясь в содержание.

Вообще у меня такое впечатление, что если бы я с ним занимался, как в школе, каждый день по одному уроку, то мы могли бы за следующий год пройти программу класса примерно до 8-го. Но я, естественно, этого делать не буду. Мне кажется, что такие занятия допустимы только лет с 11—12, не раньше.

[Здесь надо бы дать небольшое пояснение, что я имею в виду, говоря о *таких* занятиях. Я имею в виду не их систематичность, а их «инструктивный» характер. Как если бы я, например, сам рассказал ему, что такое общий знаменатель и как складывать и вычитать дроби. Это заняло бы не более получаса, и он бы уже давно всё умел. Но вместо этого я пытаюсь добиться от него, чтобы он сам всё это придумал, и в результате дело растянулось уже почти на год. Мне кажется, что инструктивное обучение вполне допустимо (и даже необходимо — иначе далеко не продвинешься), но только с определенного возраста — когда сформируется то, что Пиаже называет «формально-операциональными структурами».]

10 июня 84 года. Четверка за год.

Сегодня получили Димин табель успеваемости. По математике у него за год всё же четверка. Это единственная из его оценок, которая кажется мне несправедливой. Самое обидное то, что учительница даже не подозревает, как далеко он ушел вперед по сравнению со школьными требованиями. Откуда ей это знать?

17 июня 84 года. Вступительная задача на физфак.

Сегодня Дима решил вступительную задачу из письменного экзамена на физфак МГУ за 1983 год (вариант № 1, задача № 4 — т. е. из разряда задач «средней трудности»[4], промежуточных между легкими и трудными). Вот формулировка задачи:

> Если некоторое двузначное число поделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если то же число поделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

---

[4]Обычно в письменных вступительных вариантах давали пять задач: три легких, четвертую потруднее и пятую — трудную.

Произошло это вот как. Мой абитуриент Андрей П., которому я даю уроки, решить эту задачу не смог. На уроке в течение получаса я с огромным трудом втолковывал ему решение. Видимо, только мое раздражение его тупостью натолкнуло меня на мысль дать эту задачу Диме. Чтобы избежать зазнайства с Диминой стороны, я не стал совать ему книжку со вступительными вариантами, а выписал задачу на отдельном листке. Первое, что он сказал, выслушав условие: «Значит, делили не менее, чем на 12, да?» (То есть то, что было главным камнем преткновения для моего абитуриента, было ему понятно само собой.) Затем задумался. Должен сказать, что обстановка в доме не способствовала сосредоточенности. Сначала мы ужинали, потом он сидел на диване и думал, а к нему приставала Женя, потом Алла заставила его позаниматься английским, потом он снова отгонял Женю и т. п. Расскажу, как я сам решал задачу и как рассказывал ее абитуриенту. Из первого условия получаем, что наше число имеет вид $7k+6$, причем $k \geq 7$ (иначе остаток от деления на k не может равняться шести). Перебираем все такие двузначные числа: $55, 62, 69, 76, 83, 90, 97$. Для этих чисел проверяем второе условие: оно выполняется только для числа 83. Ответ: 83.

Я привел здесь свое собственное решение потому, что в нём содержится одна тонкая ошибка. Меня совершенно потрясло то, что Дима этой ошибки не допустил (так я и узнал о своей ошибке — из его решения!). На самом деле искомое число должно не просто иметь вид $7k+6$, но еще k должно совпасть с суммой его цифр. Я этого совпадения не проверял. В действительности первому условию удовлетворяют не все те числа, что выписаны выше, а только два из них: 62 и 83.

Через какое-то время после ужина Дима сказал: «К первому предложению я ответ нашел, но он не подходит ко второму предложению». — «А какое число?» — «62. Но если его поделить на 12, то получается не 3 и в остатке 11, а 5 и в остатке 2». — «А как ты нашел это число?» — «Умножил 7 на 8 и прибавил 6». (Опять то, чего я никак не мог объяснить абитуриенту.) «А почему сразу на 8, а не на 7?» — «На 7 я тоже умножал, тогда получается 55. Но у него сумма цифр не 7, а 10». Гм-м... Да, в самом деле; действительно... Хм-м...

Фраза Димы о том, что он уже «нашел ответ» к первому условию, показывает, что он, как всегда, не заботится о том, чтобы найти *все* решения задачи (либо доказать единственность), а удовлетворяется первым найденным решением, считая его ответом. Поэтому в этот момент я придал ему некоторый толчок, без которого он, может быть, сам бы задачу до конца и не решил, застряв на числе 62. (А может и решил бы.) Я сказал только одну фразу: «Ты на правильном пути». Но до него вполне дошел смысл сказанного: ты *на пути*, т. е. нужно проверять дальше.

Через некоторое время он прибежал ко мне и сказал, что получилось еще 83, но только при делении получается 3 (это правильно), а в остатке 5. Я сказал: «Проверь деление еще раз». Он проверил: «Да, правильно, одиннадцать».

$\lhd$ Прибежал я только для того, чтобы папа мне сказал, действительно 83 не подходит, или нужно поделить еще раз. Просто так делить мне было лень. А когда папа сказал проверить, я понял, что должно получиться, и проверял довольно халтурно. — Дима. $\rhd$

После этого я объяснил ему, что для полного решения нужно довести проверку до конца, чтобы узнать, нет ли еще решений. Мы вместе проверили $k = 12$ и 13. «А дальше?» — спросил я. «А дальше уже не будут двузначные».

Вот, собственно, и вся история. Остается только добавить, что задача была решена *устно*, и что заняло это примерно 40 минут (это «время брутто», т. е. вместе с отвлекающими делами, а чистое время оценить трудно). После этого мы с Аллой долго решали вопрос, должны ли мы уже считать его гением, или всё же пока для такого вывода данных недостаточно.

Сентябрь 1984.

Летом математикой не занимались. В начале учебного года (это, значит, уже второй класс) Дима получил от меня несколько разных задачек.

(1) Эту задачу я уже упоминал ранее: я ее тогда давал в упрощенном варианте.

> Полторы курицы сносят полтора яйца за полтора дня. Сколько яиц снесут 9 кур за 9 дней?

Сначала Дима, конечно же, сказал: «Девять». Затем, подумав с минуту, дал ответ 18. Решение при этом было таким: 9 кур в 6 раз больше, чем полторы, а 9 дней в 6 раз больше, чем полтора дня. Значит, они снесут в 12 раз больше яиц. Умножаем $1,5$ на 12 — получается 18. Я велел ему еще подумать. Тогда он догадался что $1,5$ яйца следует умножать не на $6 + 6$, а на $6 \cdot 6$, и дал правильный ответ: 54.

(2) Я рискнул дать ему известную «рефлексивную» задачу:

> Встретились два математика, которые давно не виделись, и один сообщил другому, что у него трое сыновей. «Сколько же им лет?» — спросил второй. — «Определи это сам: произведение их возрастов равно 36». Второй математик отвечает: «Данных

> недостаточно». — «Ну хорошо, тогда я добавлю, что сумма их возрастов равна числу скамеек в этом сквере». Второй (посчитав скамейки и немного подумав): «Данных по-прежнему недостаточно». — «Тогда я добавлю, что мой старший сын — рыжий», — сказал первый математик. — «А-а, ну вот это другое дело, — ответил второй. — Твоим сыновьям ...», — и он правильно назвал возраст всех трех сыновей. Определить, сколько лет было сыновьям.[5]

К сожалению, у Димы не появилось даже и проблеска идеи решения.

(3) Немного мы позанимались и дробями. Три-четыре задачи он решил правильно, но каждый раз новым искусственным приемом. Застрял он на вычислении разности $\frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ и с этой задачей так и не справился. Однако здесь впервые появились намеки на верный путь: он пытался представить $\frac{1}{7}$ как $\frac{2}{14}$ или $\frac{3}{21}$, а $\frac{1}{9}$ как $\frac{3}{27}$.

◁ Намеки, как я уже говорил, появились раньше, просто число $7 \cdot 9 = 63$ слишком большое, и я не смог его подобрать. — Дима. ▷

В школе его отметки по математике колеблются в диапазоне от двойки до четверки. Учительница (уже новая — не Ольга Ильинична, а Марина Николаевна) сказала на родительском собрании: «Каллиграфия у нас теперь ставится во главу угла». Это было сказано в процессе обсуждения именно математики. Правда, каллиграфия понималась в широком смысле: где сколько клеточек отступать, где ставить точку, а где нет, писать ли «Задача 32» или «Задача № 32», и еще бесчисленное количество подобной премудрости. Кажется, официально это называется «единый орфографический режим».

С сожалением должен отметить, однако, что Дима стал делать очень много арифметических ошибок. Причин, по-видимому, сразу несколько: однообразие задач, аденоиды, температура, общая затурканность...

25 октября 1984 года. Попытка заниматься более систематично.

По просьбе Димы (да и сам) решил заниматься с ним раз в неделю. Сегодня — первое занятие.

[5] **Решение.** Нужно разложить число 36 на три сомножителя всеми возможными способами: $1 \cdot 1 \cdot 36$, $1 \cdot 2 \cdot 18$, $1 \cdot 3 \cdot 12$, $1 \cdot 4 \cdot 9$, $1 \cdot 6 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 4$. Потом посчитать суммы этих сомножителей: $1 + 1 + 36 = 38$, $1 + 2 + 18 = 21$ и т. д. Оказывается, все эти суммы — разные, и только сумма 13 появляется два раза: $1 + 6 + 6 = 2 + 2 + 9 = 13$. Поскольку второй математик, посчитав скамейки, сказал, что данных недостаточно, мы делаем вывод, что сумма как раз равна 13 (иначе данных было бы достаточно). Информация, извлеченная из фразы «мой старший сын — рыжий», состоит в том, что *имеется старший сын*. Значит, ответ — $2, 2, 9$ (во втором варианте — $1, 6, 6$ — старшего сына просто нет).

(1) Анализировали ошибку, которую он делал в вычислении суммы $1 + 2 + \ldots + n$. Он придумал два разных решения:

(а) $1 + \ldots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 5 \cdot 11 = 55$;

(б) $1 + \ldots + 10 = (0 + 10) + (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + (5 + 5) = 6 \cdot 10 = 60$.

Он утверждал, что второе решение «неправильное, потому что нельзя начинать с нуля». Ничего более разумного он долго сказать не мог (примерно год), всё кивая на то, что это «из-за нуля». Можно сказать, что это *пережиток непонимания закона сохранения*. Я заставил его выписать все действия аккуратно. Он всё равно долго не видел ошибки, но в конце концов всё-таки ее обнаружил.

(2) Решали разные задачи «с иксами». Он это понимает *очень плохо*. Хорошо бы это дошло до тех, кто заявляет, что первоклассники якобы могут легко оперировать с иксами. Я теперь твердо убежден, что это чушь. В школе, кстати, эти обозначения вводятся как другой *способ записи* задачи или решения. Алгебраическая символика является необычайно эффективным *инструментом решения задач*. Но первоклассники об этом не догадываются. Просто среди необъятного болота правил о том, что и как записывать и как обозначать, появляется еще одно дополнительное правило, лишенное какого бы то ни было содержательного смысла.

Интересно, что когда в задаче имеются два неизвестных, Дима не понимает, что их следует обозначать разными буквами — скажем, x и y. То есть, не просто не понимает, а активно протестует: «Мы этого тоже не знаем, значит это тоже икс».

На дом я ему задал прочитать главу из Перельмана «Занимательная алгебра» — о составлении уравнений. Между прочим, выяснилось, что он разучился умножать и складывать в столбик!

6 ноября 1984 года. Общие знаменатели.

Занятие произошло неожиданно на кухне после ужина. Дима наконец дошел до идеи приведения дробей к общему знаменателю и научился складывать и вычитать дроби. Однако наличие общего знаменателя он воспринимает скорее как счастливую случайность (он находит его подбором). Я задал ему на дом подумать, почему общий знаменатель существует *всегда*.

18 ноября 1984 года. Еще одна вступительная задача.

(1) Почему всегда найдется общий знаменатель, по-прежнему не понимает. Говорит на эту тему всякие глупости.

(2) Разлагали числа 48, 216, 1 001 на простые множители. Дима искренне недоумевал, для чего мы всё это делаем. Про число $1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

я сказал: «Правда, как интересно получается?» Он недоуменно спросил: «Что интересно?»

(3) Решили несколько задач из книжки Труднева. Он справлялся с ними довольно легко, хотя иногда и ошибался.

(4) Дал ему такую задачу:

> Ученик перемножал два числа, но ошибся и получил в результате число на 5 меньше, чем нужно. Для проверки он поделил результат на один из сомножителей — и получил частное 29 и остаток 7. Какие числа он умножал?

Это слегка усложненная задача из вступительного варианта в МИСИ (инженерно-строительный): в оригинальной задаче было еще одно дополнительное условие, без которого можно обойтись. У Димы никаких идей решения не было; он пытался перебирать разные варианты, но довольно бессмысленно. Я сидел и раздражался: ну чего он такой тупой!

Из олимпиады.

Как-то на днях я задал Диме задачу из районной олимпиады в Новосибирске (для 7—9 классов):

> Нам вдвоем 35 лет. Мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько нам лет?

На следующий день он ее решил. Характерно однако, что он все такие задачи решает перебором. В этом и причина его неудачи с задачей из МИСИ: там перебор ничему не помогает, а нужны рассуждения (причем очень несложные).

19 ноября 1984 года.

За обедом минут за пять Дима решил задачу про трех рыбаков — как каждый из них выбрасывал одну рыбу и забирал треть оставшихся; получил ответ 25. Потом я сам рассказал ему про «решение Дирака», т. е. про ответ -2.

25 ноября 1984 года. Делимость на три. Сумма ряда.

(1) Дано вот такое число:

$$101001000100001000001\ldots1\underbrace{0000\ldots0}_{300\text{ нулей}}.$$

Требуется узнать, делится ли оно на 3. (Ответ: делится, т. к. сумма его цифр равна 300, т. е. делится на 3.)

Сначала Дима задачу не решил. Мы разговаривали, я подсчитывал, сколько в этом числе цифр (45 450), потом мы вместе считали, поместится ли оно в тетрадке. Потом выясняли, во сколько раз 10^{300} больше, чем 10^{27}. После этого Дима от задачи отказался, сказав, что решит потом, а сейчас тоже хочет что-нибудь решать (а не просто сидеть).

Тогда мы решили пару задач из книжки Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки». Потом вошла Алла, и я ей рассказал исходную задачу. Тут вдруг Дима догадался до суммы цифр и решил задачу, а потом и еще одну — о делимости того же числа на 9.

(2) Следующий вопрос: будет ли это число полным квадратом? (Это число *не* является полным квадратом, так как оно делится на 3, но не делится на 9.)

Дима высказал гипотезу, что «почти все круглые числа — квадраты». Стали проверять на машинке — гипотеза провалилась. В итоге всех обсуждений на дом остались две задачи: во-первых, про это гигантское число, и, во-вторых, когда число 10^n будет квадратом.

(3) В качестве очередной задачи из Игнатьева я выбрал знаменитую задачу о мухе (с несколько упрощенными численными данными):

> Между городами A и B — 300 км. Два велосипедиста — назовем их a и b — одновременно выезжают навстречу друг другу со скоростью 50 км/ч. Одновременно с ними из A вылетает муха со скоростью 100 км/ч и летает между ними: встретившись с b, она летит обратно к a, от него снова к b, опять к a и т. д., и так до тех пор, пока велосипедисты не встретятся. Сколько километров пролетит муха?

Как ни странно, Дима решил эту задачу с помощью суммирования бесконечного ряда. Вот как это произошло. Он стал долго и напряженно подсчитывать, сколько километров муха пролетит до первой встречи с b; получил 200 км. Затем стал считать, сколько она пролетит до встречи с a; нашел $66\frac{2}{3}$ км; затем — до второй встречи с b: $22\frac{2}{9}$ км. Тут он сообразил, что ряд получается бесконечным, и закричал: «Ой, папка! Та́к ведь бесконечно будет!» — «Да». — «Значит, задача не решается?» — «Ну почему же? Во-первых, можно придумать другой способ решения, хитрый. А, во-вторых, иногда и бесконечную сумму можно сложить». — «Как это?»

(4) Тут мы отвлеклись от исходной задачи, и я написал Диме такую сумму:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots,$$

объяснив, что количество слагаемых бесконечно. Я спросил: «Как ты думаешь, сколько получится?» И тогда произошло нечто совершенно удивительное. Дима, ни секунды не размышляя, пожал плечами и ответил: «Два...»

Я — после паузы: «Почему?» — «Ну смотри. Сначала до двух не хватает половины. Потом четверти. Потом одной восьмой. И так всё время будет». То есть по существу дал совершенно правильное доказательство (рис. 8.3).

Я с ним согласился, повторил его рассуждения более подробно, потом нарисовал приложенные друг к другу отрезки длин 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., и показал то же самое рассуждение на рисунке. Главным образом я пытался сделать вид, что ничего особенного не произошло, хотя сам был несколько взволнован, и у меня даже слегка дергались колени. Так что́ же получается — что и в самом деле гений?

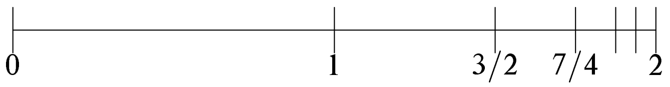


Рис. 8.3. Суммирование бесконечного ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$ «Видно», что результат равен 2: после каждого шага расстояние до числа 2 уменьшается вдвое.

Следующий вопрос: «А у нас муха каждый раз во сколько раз меньше пролетала?» Дима задумался и сказал: «В три». (Я тут, видимо, слегка опередил события: Дима сам еще не догадался, что расстояние каждый раз уменьшается в одно и то же количество раз. Но после моего вопроса заметил такую закономерность — разумеется, без доказательства.) Я написал следующий ряд:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots$$

«Сколько теперь получится?» — «Три», — всё так же не задумываясь ответил Дима (видимо, опираясь на чисто формальную аналогию). У меня немного отлегло от сердца. Нет, всё-таки не гений; нормальный способный ребенок. Я засмеялся и сказал, что, мол, как же так — каждое слагаемое меньше, а сумма больше? Дима сначала не понял, о чем я говорю; я объяснил; он ответил: «Ну и что?» — но потом всё же задумался. Стал считать, используя прежний прием, т. е. подсчитывая, сколько не хватает до двух, а я записывал: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{14}{27}$, ... Вскоре он догадался, что в пределе не хватает половины, и, значит, получится полтора. Я не стал настаивать на доказательстве, хотя отрезки мы всё-таки нарисовали.

◁ На самом деле нужно было проверить, что расстояние до полутора каждый раз уменьшается в три раза. Мне еще долго после этого ответ «полтора» казался непонятным (а только угаданным). — Дима. ▷

(5) Возвращаемся к задаче о мухе. «И, значит, что́ теперь нужно помножить на полтора?» — спросил я. Дима уставился на меня в недоумении: он явно забыл, от какой печки мы с ним танцевали. Потом сказал: «А-а...» — и надолго задумался. После чего, наконец, ответил: «Двести километров. Значит, будет триста километров». — «Значит, какой ответ?» — «Триста километров».

После этого я ему рассказал настоящее решение: велосипедисты ехали до встречи 3 часа; значит, муха летала туда-сюда тоже три часа, причем со скоростью 100 км/ч; получается $100\,\text{км/ч} \cdot 3\,\text{часа} = 300\,\text{км}$.

Дима никакого особого восторга не проявил.

◁ Думал-думал, что-то такое придумывал, а оказалось, что всё зря, можно было решить гораздо проще. — Дима. ▷

Я засомневался, понял ли он мое решение, и дал ему модификацию задачи: скорости велосипедистов — 20 и 40 км/ч, а скорость мухи 80 км/ч. Оказалось, что он всё понял, потому что действия производил правильные. Однако времени было уже полдесятого вечера, и он сначала никак не мог поделить 180 на 20 (всё получал 8), а потом не мог умножить 80 на 5 (получал 450). Так что на этом мы занятие кончили, хотя еще полчаса после этого он приставал ко мне с вопросами, почему в школе не учат математике так же, как я. И трогательно, и обидно до слёз. Господи, если бы можно было ограничиться нашим одним занятием в неделю!

26 ноября 1984 года.

Выяснилось, что Дима всё же не понимал, что такое сумма бесконечного ряда, и считал оба своих ответа приближенными.

19 декабря 1984 года.

Сегодня, после большого количества проб, ошибок и путаницы, Дима наконец научился умножать дроби.

26 декабря 1984 года. О ханойской башне.

(1) Где-то на протяжении прошедшей недели Дима научился также и делить дроби.

(2) Жене (нашей) подарили на день рождения новый вариант ханойской башни. Он называется «игра ранжир», и вместо кружочков в ней нужно расставлять фишки с цифрами — не до 5, как в венгерской игрушке, а до 8 — причем нельзя бо́льшую цифру ставить на меньшую. Я бы сказал, что 8 фишек — это чересчур: чтобы решить задачу, нужно сделать 255 ходов.

Дима с Петей, увидев игру, мгновенно догадались, что это модификация ханойской башни.

После этого у Димы вновь обострился интерес к этой игре. Он провел с ней несколько дней и, наконец, пришел ко мне с заявлением, что он знает оптимальный алгоритм. Огромные трудности у него вызвала формулировка алгоритма. Он никак не мог понять, с какого конца начать, какими словами выразить свою мысль, и всё только повторял бессмысленно: «Сначала вот эту — сюда, потом вот эту — сюда, потом вот эту — сюда, вот эту — сюда, вот эту — сюда...» При этом я видел, что сами действия он делает совершенно правильные. Большого труда и терпения стоило получить от него настоящую формулировку. Алгоритм оказался в самом деле оптимальным. Он состоит в следующем:

(а) ходить надо по очереди единичкой (или самой маленькой плашечкой) и не единичкой;

(б) ход не единички каждый раз определяется однозначно, так как ее нельзя ставить на единичку;

(в) единичкой надо всегда ходить в одну сторону и по циклу.

Я обсудил с ним проблему необходимости доказательства, но сейчас о нём нечего даже и помышлять. Хочу заметить, что я сам в свое время не придумал ни алгоритма (я его где-то вычитал), ни доказательства (его после моего вопроса придумал Дима Бугаенко).

Всего в этом семестре занимались 6 раз, не считая разговоров «между делом».

О первоклассниках

Здесь собрано несколько разрозненных заметок о двух первых классах: в течение одного полугодия я вел кружок в Димином классе, и в течение месяца работал преподавателем в «экспериментальном» классе. Если бы я стал вести что-то вроде дневника на эту тему, то как минимум 95% его содержания было бы посвящено вопросам дисциплины. Без наведения порядка в классе, без того, чтобы дети перестали баловаться, драться, петь, бегать и ... (дальше следует длинный список глаголов, который каждый сможет продолжить сам), короче, без создания в классе нормальной рабочей обстановки невозможно сдвинуться ни на шаг. Каким образом добиться этого и оставить в то же самое время возможность для поиска, для творчества — это великая загадка; только настоящие виртуозы на это способны. Я к ним не только не отношусь, но даже и на версту не приближаюсь. Поэтому буду писать только о том, в чём я хоть что-то смыслю.

Откуда берутся способности?

Вот вопрос, который всех интересует! Это я развил Димины способности к математике с помощью кружка, или же, наоборот, он уже родился способным, а кружок протекал так интересно как раз благодаря этому? Я сам склоняюсь ко второму варианту. Роль кружка состояла в том, чтобы он *узнал* о том, что существует математика — активная, веселая, захватывающая. Другой вопрос — как часто встречаются талантливые дети и сколь многие из них так и проходят мимо своего призвания, так никогда и не узнают о том, что могла предложить им жизнь? Вот как раз об этом я и хочу сказать: в *первом попавшемся* классе я встретил мальчика, который был отчетливо способнее Димы (и ведь это при том, что никто с ним специально не занимался). Звали его Глеб. Учился он весьма средне; что делает сейчас, не знаю. Вот несколько наблюдений.

1. Задача про C_5^2 (см. главу 3). Часть ребят вообще не поняла условия; другие нашли всего 3—4 решения; третьи якобы «нашли» 24—26 вариантов, не замечая повторений; один только Глеб нашел ровно 10 решений и твердо заявил, что больше нет. (Правда, в качестве объяснения сказал, что $5 + 5 = 10$.)

2. Фокус, в котором складывались закрытые числа (см. стр. 207), он разгадал тут же на занятии. Его решение тоже, как и Димино, основывалось на периодичности таблицы, а не на дополнении до 20.

3. Еще один фокус, основанный на том, что сумма цифр на противоположных гранях кубика равна 7 (см. стр. 210), он тоже разгадал сразу. Мне надолго запомнился его сосредоточенный взгляд: он изучает кубики, смотрит, что лежит сверху, потом что лежит снизу, лицо озаряется...

Мне кажется характерным также и то, что как-то раз я объявил его «чемпионом», поскольку он быстрее всех что-то вычислил, но он в ответ признался, что его вычисление было ошибочным.

Что такое задача?

После одного из занятий Глеб задал мне такую задачу (рис. 8.4):

> Вот здесь озеро (рисует). С этой стороны живет Баба, а с этой стороны — Дед. Вот здесь растет камыш. Вот здесь лежит огурец. А в озере живет черт, он никого не пускает. А вокруг озера тоже пройти нельзя, там лес. Как Деду проехать к Бабе?

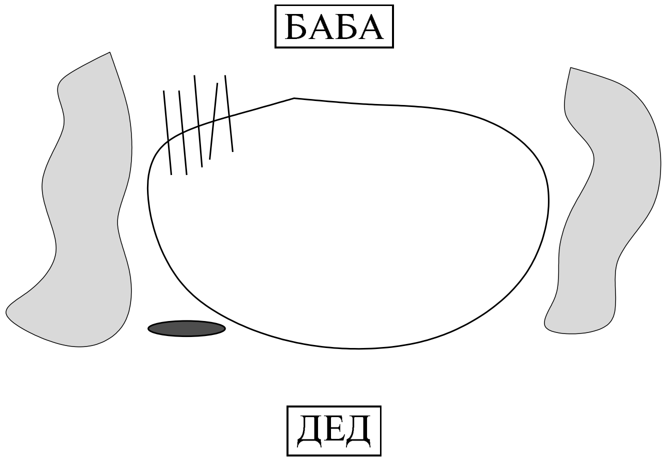


Рис. 8.4. Как Деду проехать к Бабе?

— А лодка у Деда есть?

— Нет.

— А обойти лес вокруг?

— Э-э, нет, так нельзя!

— . . . ?

— Сдаетесь?

— Сдаюсь.

— Ну вот. Этот черт был очень послушный. Дед ему говорит: «Черт, черт, съешь огурец». Он съел. Дед ему говорит: «Черт, черт, накоси камышей». Он накосил. Тогда Дед ему говорит: «Черт, черт, там твои внуки плачут, тебя зовут». Черт нырнул под землю, и в дне озера образовалась дырка, и вся вода из озера туда утекла. И Дед по дну — пух, пух — и перешел к Бабе.

Должны ли мы сделать вывод, что во всех наших «задачах на смекалку» дети видят ровно столько же смысла и логики, сколько в этой? «Задача — это когда сначала что-то рассказывают, а потом задают вопрос, на который непонятно, как отвечать». Никакой связи ответа с условием задачи при этом не предполагается.

Примерный ученик.

На одном из занятий мы решаем задачу про C_5^2, а на следующем — про C_5^3. Потом я объясняю, почему эти задачи эквивалентны друг другу: выбрать и закрасить две клеточки из пяти — это то же самое, что выбрать и оставить незакрашенными три клеточки из пяти. Так что мы могли бы догадаться, что сегодняшняя задача похожа на ту, что была в прошлый раз, и сразу сказать, что у нее будет 10 решений. Один мальчик тянет руку. «Что тебе, Алёша?» — «*Я догадался*, что что эта задача похожа на ту, что была в прошлый раз...» В прошлый раз он на занятии не был.

Пример на вычитание

Мы находимся в экспериментальном первом классе; в нём всего 18 учеников.

Я насыпал в бутылку из-под молока некоторое количество бобов и предлагаю ребятам угадать, сколько их. Весь класс кричит «сто!». Я тогда говорю, что так неинтересно: никто не будет победителем. Давайте, говорю я, каждый назовет свое число, но только чтобы все числа были разными. Мы их запишем на доске, а потом проверим.

Записываем имена и числа на доске. Потом всем классом хором вслух считаем бобы: это не вредно — лишний раз повторить последовательный счет. Бобов оказывается 49. «Ну что, кто победил?», — спрашиваю я. «Никто не победил». Дети имеют в виду, что никто не угадал точного количества. «Ну, хорошо, а кто всё-таки оказался ближе всех к правильному ответу?» — «Таня ближе всех». (Она назвала 52). «А на сколько она ошиблась?» — «Она ошиблась на три боба», — отвечает класс.

Всё хорошо. С этой задачей покончено, и мы переходим к другим делам. Примерно через четверть часа я задаю детям «пример на вычитание»: из 52 вычесть 49. Результат ошеломляющий: с этой задачей не справился ни один человек. Ни один!

Я оставляю читателям полную свободу для интерпретаций.

Потрогать руками

Мы — в том же классе, но теперь — в компьютерном зале. Идет урок информатики. Я уже упоминал ранее язык Лого, специально приспособленный для детей. С помощью совсем простых программ дети могут управлять движением по экрану небольшого робота-черепашки, а могут и писать сочинения и делать много чего еще. Некоторые ученики работают с удовольствием; другие откровенно маются и даже начинают шататься по классу (дисциплина, дисциплина!). Неожиданно один из таких «шатающихся» обнаруживает в шкафу допотопный арифмометр. «А что это?» Объясняю, что это машинка, которая умеет складывать. «Как? Сама складывать?» Тот факт, что компьютер умеет складывать, его почему-то не удивляет, но вот машинка! «А покажите...» Весь класс уже давно сорвался с места и окружил нас со всех сторон. Я ставлю в окошечке 6 и говорю, что сейчас прибавлю 1. Поворачиваю ручку: «трык-трык-трык-трык-трык!», — и в окошке появляется 7. «Уу-ааа!», — реагирует класс; в смысле «вот это да!!!» Теперь уже каждому хочется повернуть ручку, чтобы машинка так вот «здóровски» заурчала — и прибавила единицу. Скучные компьютеры забыты: ведь здесь можно самому ручку крутить! А мне вспоминается цитата, которую я незадолго до того выписал себе в тетрадочку. Учительница Т. Служевская в своей статье «Без шаблона» в журнале «Юность» (№ 1 за 1986 год) рассказывает:

> ... Еще экскурсия, на этот раз в зоопарк с четвертым классом. Мы долго ходим по территории: хищники, обезьянник, крокодилы за стеклом, слон за барьером из колючек... Ребята дружно облепляли решетки, читали надписи — процесс познания шел вовсю! Вдруг пропал один мальчишка. Не успела я испугаться — он вылетает из-за угла запыхавшийся, красный, с горящими глазами: «Скорее! Скорее! Зовите всех! Там такое... такое!!» Что же, думаю, могло его так потрясти после всех питонов и бегемотов? А он кричит: «Там лошадь можно руками потрогать!» И всех ребят как ветром сдуло от слона — лавиной бросились за угол! А там стояла запряженная в телегу гнедая кобылка с провисшим брюхом, на которой развозят корма. И ее и правда можно было погладить, и дать ей с руки травки, которую она вежливо брала мягкими губами...

Ну до чего ж замечательная история! Можно было бы поставить эпиграфом ко всей моей книжке.

Глава 9.

Кружок с девочками — первый год

Введение

В нашем новом кружке три участницы: моя дочь Женя и две ее подружки, Саня и Дина. Кружок начался в январе 1984 года. В этот момент Жене — 4 года, Сане — 4 года 8 месяцев, Дине — 5 лет и 3 месяца.

Ответы на часто задаваемые вопросы

У меня часто спрашивают, есть ли какой-то глубокий смысл в том, что в первом кружке у меня были одни мальчики, а во втором одни девочки. Нет, никакого глубокого смысла в этом не было. Так сложилось само собой: я просто сначала занимался с Димиными друзьями, а потом с Жениными. Сыграло роль также и то, что Дима и Петя, друзья по двору и почти ровесники, оба имели по младшей сестре, и их сестры — Женя и Саня — оказались тоже практически ровесницами. Так оно и поделилось — на «старших мальчиков» и «младших девочек». Потом на основе дружбы детей постепенно завязалась и дружба между родителями.

Второй нередкий вопрос — отличался ли кружок с мальчиками от кружка с девочками? Да, отличался, и очень сильно. Но кружок с *другими мальчиками* тоже бы отличался. Характеры у детей были очень разные, интересы тоже, отсюда и разница. А насколько это коррелирует с полом, я судить не берусь: для этого нужны более серьезные исследования.

Читатель, несомненно, обратит внимание на то, что с мальчиками я занимался четыре года и провел в общей сложности около 80 занятий, в то время как с девочками было всего 20 занятий. (Скажем более точно: было 20 *записанных занятий*. Женя потом была еще в числе моих учеников в детском компьютерном клубе и в Переславском лагере.) В чём тут дело? Уж не в том ли, что мы относились к математическому образованию девочек менее серьезно?

Не знаю, поверит ли мне читатель на слово, но у меня всё равно нет другого выхода, кроме как писать то, что считаю нужным. Честный и искренний ответ на предыдущий вопрос таков: нет, дело не в этом. Причины были иными.

Во-первых, меня, несомненно, очень сильно стимулировал Димин страстный интерес к математике, а также и способности явно выше среднего, в то время как Женя математикой совершенно не интересовалась. Но в ряду всевозможных причин я бы конкретно этой причине отвел процентов двадцать, не более. Главное было в другом: началась перестройка. Я об этом уже писал во введении. Забурлило всё вокруг, и моя жизнь в том числе. Как сейчас помню: четыре часа утра; мой друг, биолог Борис Беренфельд подвозит меня домой после очередного затянувшегося обсуждения педагогических реформ; и я с ужасом думаю о том, что в полседьмого, как всегда, вставать на работу. А силы человеческие ограничены. . .

Наконец, еще один очень въедливый вопрос: зачем же я вообще затеял кружок с Жениным участием, если она математикой не интересовалась?

Ну как же вам не стыдно, уважаемый читатель, задавать такие вопросы!

Нет, серьезно, кроме шуток. Для ребенка жизненно необходимо общение с родителями. Даже негативное общение, вроде ругани и наказаний, лучше, чем отсутствие всякого общения, и дети часто его провоцируют, если им иначе не удается привлечь к себе внимание. Чаще же всего имеет место нечто безлично-деловое с легким оттенком негатива: «Поди помой руки. Спать пора, хватит у телевизора торчать. Ты портфель назавтра сложил? Ну вот, опять у него температура!» Давно ушли те времена, когда взрослые — крестьяне или мастеровые — привлекали детей к своей работе. Современный ребенок о работе своих родителей знает единственное: это куда утром уходят и откуда вечером приходят. Ну, разве что еще то, что там устают: «Папа устал после работы, оставьте его в покое». Моменты *содержательного* общения с детьми, т. е. совместного участия в каком-нибудь разумном деле, крайне редки, и ценность их не поддается никакому измерению. Вот это и происходило у нас с Женей. Она с восторгом занималась на кружке — не потому что математикой, а потому что это папа уделяет ей свое время и внимание, занимается с ней, причем занимается чем-то серьезным, тем, чем раньше занимался со старшим братом.

Кстати, увлечение Димы математикой в тот период тоже не следует преувеличивать. Гораздо больше его увлекали занятия, которые организовал для мальчиков Борис, Женин папа (извините, у нас тут всё время путаются мальчик Женя и девочка Женя; папа *девочки Жени* — это я, а папа *мальчика Жени* — это как раз Борис). Ребята ходили с ним в лес и там перебирались по канату через овраги, «охотились на оленей», ориентировались по карте, выкапывали какие-то пещеры, устраивали в них тайники и т. п. Думаю, что и Бориса самого увлекло это общее поветрие, когда я занимался с детьми математикой, Алла — английским, Андрюшина мама — музыкой, в общем, каждый кто чем мог.

Ну, а почему бы в таком случае не выбрать другой сюжет, более соответствующий Жениным наклонностям? Да просто не было у меня никаких других сюжетов. Делал то, что умел и любил. Женю в тот момент больше всего увлекало рисование (об этом дальше), и рисованием она уже занималась в кружке замечательного педагога и художника Надежды Столповской. Так что я вполне мог бы умыть руки и сказать, что мой родительский долг исполнен, ребенок пристроен куда надо, а я теперь имею полное право «уставать, приходя с работы», и более ничего.

Но мы всё-таки решили затеять математический кружок для Жени тоже. И, поверьте мне на слово, удовольствие было вполне взаимным.

Характеры

У Дины характер достаточно ровный. Присутствует небольшая капелька занудства, но для наших занятий это только дополнительное удобство. Напротив, что касается Сани с Женей, тут меня могут ждать проблемы. Темперамент у обеих девочек довольно-таки «взрывчатый», чтобы не сказать больше. Их взаимоотношения во многом строятся на аффектах. То они лучшие в мире подруги; то вдруг вспыхивает страшная ссора, разрыв навсегда, на всю жизнь! После этого уже можно с рёвом кидаться в объятия друг к другу (или к маме), клясться в вечной любви, чтобы потом вести себя совершенно по-ангельски — примерно полчаса.

Одним словом, хоть я и набрался кое-какого опыта в работе с мальчиками, меня могут ждать трудности нового рода, или те же, что были, но в обостренной форме. Ну что ж, как говорил некто, не тем будь помянут, сначала нужно ввязаться в драку, а там посмотрим.

Меня просили взять в кружок еще одну девочку — Катю. Я, однако, уклонился. Катя еще старше Дины, т. е. разница с Женей у нее почти в два года, и при этом она девочка весьма способная к математике. В таком кружке Жене вообще будет нечего делать.

Женя рисует (длинное отступление)

Расскажу о Жене немножко подробнее.

Просто даже удивительно, насколько разными могут быть дети в одной и той же семье. Вроде бы все начальные условия одинаковые, воспитание тоже, да и влияние родителей одно и то же. Ну конечно, мне скажут, что первый ребенок растет один, в то время как у второго есть, кроме мамы и папы, еще один дополнительный старший член семьи. Какие-то свойства характера это обстоятельство, быть может, и способно объяснить. Но как отсюда вытекают специфические способности и интересы — то, о чём в основном идет речь в этой книге — я совершенно не вижу. Забегая далеко вперед, в сегодняшний день, я могу сказать: и Дима, и Женя выросли хорошими людьми. Но это едва ли не единственное что есть между ними общего.

У нас сохранилась фотография: Жене 1 год и 3 месяца; при этом она правильно держит фломастер — ровно так, как этому учат в школе. В это было бы трудно поверить, если бы не документальное свидетельство.

Я не помню, когда она начала рисовать. Я не обращал на это особого внимания: все дети что-то калякают, это нормально. Потом как-то раз — Жене было три года — вгляделся повнимательнее в одну каляку, и это было как удар. Представьте себе квадратный лист желтоватой, в пятнах, бумаги размера сантиметров в 15. Через всё поле сверху донизу идет бесконечно длинная нога. Внизу, у самого края листа, она заканчивается ступней, а сверху уходит куда-то в неведомые выси. Это нога взрослого. Оттуда же, с высей, из-за самого края листа спускается ладонь. За нее и держится ребенок, который, собственно, и занимает всё остальное пространство рисунка. То есть можно было бы сказать и иначе: нарисован ребенок, и нога взрослого рядом с ним. Рисунок в целом еще очень неумелый, но композиция, композиция!

С тех пор я, или, точнее, мы с Аллой, стали более внимательно приглядываться к тому, что происходит. Участвовать в деле я никак не мог — рисовать я совершенно не умею. Алла, напротив, рисует очень хорошо. Но оказалось, что наше участие вовсе и не требуется. Или, лучше сказать, требуется исключительно материальное участие. Представьте себе ребенка пяти лет, который рисует *шесть часов подряд*, с перерывами только на то, чтобы сбегать в туалет. Естественно, что в доме стало не хватать бумаги. Обыкновенные школьные тетради в то время были не то чтобы большим дефицитом, но и просто так на прилавках тоже не валялись. Надо было ловить. Потом я стал приносить с работы старые компьютерные распечатки. Читатели постарше помнят эти широкие рулоны бумаги с перфорацией по краям. Качество бумаги было не ахти, фломастеры проступали насквозь, но другого выхода не было, тем более что и этих рулонов вскоре стало не хватать. Иногда в ход шли газеты: их поля в мгновение ока покрывались какими-то оживленными событиями чьей-то придуманной жизни. Запомнилась фотография в газете: какой-то деревянный домик с выставки современного сборного жилья. Мы отобрали у Жени бумагу, потому что никак не удавалось отправить ее спать, но на столе валялась газета, и не успели мы оглянуться, как напоследок весь домик буквально ожил: какие-то дети играли во дворе, какие-то человечки выглядывали из окон, кто-то стучал молотком на крыше...

Качество рисунков я здесь особенно не обсуждаю. Их выразительность росла день ото дня. Конькобежцы с развевающимися шарфами, пианисты за роялем, коровы на лугу — казалось, ничто не представляло проблемы для изображения. Всё более отчетливо начинало проявляться портретное сходство, если мы сами или кто-либо из знакомых были героями истории. У нас и сейчас висит дома картинка: Дима что-то очень энергично рассказывает, размахивая руками, а сама Женя смотрит на него скептически, но доброжелательно. Да-да, поверьте: художнику удалось передать не только сходство, но и характеры персонажей.

Но главным, конечно, был этот постоянный напор, эта потребность рисовать без передышки и потом опять рисовать. Мы смотрели на это чудо света, возникшее само по себе, без малейшего нашего понукания, и, что называется, «ходили на цыпочках». Мы не знали, что будет дальше. Сохранится ли эта тяга к рисованию на всю жизнь, или в один «прекрасный» момент вдруг прекратится внезапно, как и началась. И что мы тогда должны делать? Приставать к ребенку, чтобы она рисовала хотя бы по полчаса в день? («Ну ладно, пожалуйста, двадцать минут, если ты такая ленивая». — И через десять минут: «Сколько там уже времени прошло, а, пап?» Вот такие примерно сцены рисовались в моем мозгу. Я знал, что так нельзя — ну, а как можно?) Просто поразительно, до какой степени мы бессильны перед явлениями природы — а перед нами было, несомненно, явление природы.

Читатель ждет уж рифмы «розы».

Чем может закончиться такая история? Вроде бы есть два возможных конца: «но ничего подобного не произошло», или же «именно так всё и произошло». На самом деле, как это почти всегда бывает в жизни, произошло нечто третье. Женя в самом деле стала рисовать гораздо меньше — как только научилась писать. Оказалось, что ее рисование — это лишь производная от совсем другой страсти: от сочинения историй. Или, говоря иначе, это способ перенесения историй на бумагу. Когда появился другой, более адекватный способ, она тут же перестроилась на него.

Если бы мы были более прозорливыми родителями, мы бы догадались до этого раньше. Ведь истории и сказки Женя сочиняла всегда, а вовсе не только тогда, когда рисовала. Например, летом на даче, во время наших долгих прогулок; истории длились часами. Больше всего, конечно, доставалось Алле. Она говорила, что у нее порой возникало чувство, что она сейчас упадет в обморок. А Женя мгновенно определяла, когда ее переставали слушать внимательно. Часто нам поручались роли отдельных персонажей, и мы должны были произносить их реплики, которые Женя нам тут же и диктовала. Иногда мне казалось, что вот такое не творческое, механическое участие в пьесе — это как-то неинтересно. И я позволял себе внести свою собственную лепту в сюжет, т. е. произносить не то, что было велено, а нечто иное. Наказание следовало незамедлительно, и было оно — по крайней мере на мой взгляд — более суровым, чем преступление.

Возвращаясь на минуту к рисованию, хочу заметить одну поразительную вещь. Женя как-то, будучи уже взрослой, стала рассматривать свои старые рисунки (небольшую их часть, примерно полчемодана, мы увезли с собой во Францию). И вот оказалось, что она прекрасно помнит эти истории, которые сочиняла в четырёхлетнем возрасте, и может их все заново пересказать, глядя на рисунки.

Научившись писать, Женя стала активно осваивать разные жанры и разные манеры письма. Она узнала, что существует такой жанр, как мемуары — и принялась писать мемуары. Мы читали дома вслух драмы Шиллера — и она тотчас же сочинила драму в стиле Шиллера. Само собой разумеется, были сказки. Несколько позже появилась пьеса-телефонный разговор (с тремя участниками: сама Женя, ее подружка, и время от времени встревающий в разговор старший брат). Как и Дима, она занималась с Аллой английским — и, естественно, со своим весьма еще скудным словарным запасом принялась сочинять сказки по-английски. Самая уморительная история произошла, когда Жене было семь лет. Она случайно обнаружила дома учебник японского языка. Выяснив с нашей помощью, что у японцев кроме иероглифов существуют еще две слоговые азбуки, она немедленно придумала какую-то сказку (с некоторой натяжкой можно сказать, что по-русски: бóльшую ее часть составляли слова типа «мама» или звукоподражания типа «му-му») — и записала ее одной из этих азбук. Мы потом показали получившийся текст знакомой девочке Ане Шубиной, которая всерьез учила японский, и та просто каталась по дивану от восторга. Увлечение японским, однако, продлилось недолго, так как его выразительные возможности быстро исчерпались.

Примерно в одиннадцать лет Женя и ее подружка Маша сочинили вдвоем целую повесть величиной в большую общую тетрадь. Повесть довольно символически называлась «Лето из детства». Символически потому, что приближался — и уже частично осознавался — тот трудный для всех литераторов переломный момент, когда оканчивается детство, и они чувствуют, что больше вот так вот по-детски, легко и без затей, писать не могут. У Жени этот сложный момент совпал с переходом на другой язык.

Последний «детский» эпизод, который я хочу здесь привести, относится уже к Франции. Жене двенадцать лет; она учится во французском колледже на языке, о котором еще полгода назад не имела практически никакого представления. Домашнее задание: сочинить сказку в стиле Марселя Эме (которого они тогда проходили). Женя сочинила что-то до такой степени очаровательное, что, говорят, ее сказку потом читали в учительской. Оценка — 17; и это несмотря на множество орфографических ошибок.

Чтобы оценить этот факт, нужно знать французскую систему оценок. Оценки во Франции ставятся по 20-балльной системе. Но при этом если по математике вполне можно получить 20 — достаточно просто решить все задачи, то по предметам гуманитарного цикла по традиции всегда ставят оценку не выше 16. Алла одно время преподавала здесь в университете русский язык и поставила двум студенткам на экзамене 20. И директор ее департамента мягко ей выговаривала: «Алла, как же ты поставила им 20? Ведь ты же знаешь, что мы выше 16 никогда не ставим». — «Но послушай, Катрин, — отвечала Алла, — эти две девочки русские. Они говорят по-русски так же, как я. А экзамен был по практике устной речи». — «Всё равно. Мы выше 16 никогда не ставим». На самом деле ставят — для того, чтобы подчеркнуть: произошло нечто неординарное.

Здесь я, пожалуй, остановлюсь. Не следует превращать эту книжку в Женину биографию. Задним числом я сам себе задаю вопрос: почему я решил обо всём этом написать? Ответ — по крайней мере для меня — ясен: я сделал это из чувства справедливости. Успехи Жени в математике очень скромны. «Были в семье двое детей, один способный, а другой так себе...» К такому выводу неизбежно должен был бы придти любой читатель этой книги. А это обидная неправда. Правда же состоит в том, что были в семье двое детей — один способный к математике, а другой — к рисованию и литературе. По существу я должен был бы написать такой раздел *о каждом* из детей — участников обоих кружков. Но для этого я их недостаточно знаю. Вот, например, однажды мне случайно попалась на глаза видеозапись, на которой Саня, уже взрослая девушка, что-то рассказывает по-английски. Я был искренне поражен. Наши дети тоже свободно говорят по-английски, так что этим меня особенно не удивишь, тем более после 14 лет жизни на Западе. Но когда они говорят, всё же достаточно отчетливо видно (точнее, слышно), что это говорят не англичане и не американцы. А вот Саню за-просто можно было спутать с коренной американкой. Каким образом ей это удалось — без долгой жизни с детства в Америке? Это один из тех вопросов про талантливых людей, на которые никакого рационального ответа не существует. И хорошо еще, что Саня в детстве занималась английским с Аллой, иначе я вообще мог бы даже не подозревать, что она знает хотя бы «хау-ю-дуду». Поэтому я снова и снова обращаюсь к читателям: *пожалуйста, очень вас прошу, не забывайте, что я пишу только лишь об одной маленькой грани очень многогранных детей.*

А Женя, между прочим, обещала мне перевести эту книжку на французский. Я уверен, что перевод будет превосходным.

Возвращаясь к математике

До кружка, т. е. до возраста четырех лет, я с Женей занимался математикой лишь один короткий отрезок времени, когда ей было два года. Я об этом вкратце упоминаю на стр. 145. Вот что я записал тогда, 23 января 1982 года:

Это занятие имело неожиданное продолжение. Я еще не успел убрать коробку с фигурками, когда с прогулки вернулась Женечка и сразу захотела «в это» играть. Я дал ей задание по ее силам — высыпал все фигурки в крышку и предложил укладывать их обратно.

Кажется, я раньше не объяснял: в коробке для набора Дьенеша для каждой формы имеются две лунки. Количество фигурок каждой формы равно 8, из них 4 с дыркой и 4 без дырки. Предполагается, что они и будут уложены соответственно — по 4 штуки в каждую лунку.

Женя принялась за дело с большим энтузиазмом. Сначала она тыкала фигурки совершенно произвольно; например, пыталась засунуть большой квадрат в лунку для маленького треугольника. Порой она пыталась класть фигурку в правильную лунку, но неправильно ее поворачивала — и, восприняв эту неудачу наравне с остальными, переходила к другим лункам. Когда ей удавалось правильно уложить фигурку, я в качестве подкрепления восклицал: «Оп!» Если же она, например, помещала маленький круг в лунку для большого квадрата (явно полагая, что это правильное решение — ведь он поместился!), я ничего не говорил. Постепенно она научилась отличать правильную укладку от неправильной и сама стала говорить: «Оп!» Еще она объясняла мне, что укладывает фигурки спать. Так мы занимались целый час, успев за это время уложить все фигурки по три раза. За это время Женя научилась определять фигурки одинаковой формы и размера, но сопоставлять форму фигурки и лунки так и не научилась. Процесс укладки происходил примерно так: она брала, например, большой круг и тыкала его подряд в разные лунки. Как только находилась нужная лунка, она начинала выбирать из множества фигурок один за другим все большие круги и класть их туда же. До некоторых пор всё шло гладко: пять кругов в лунку помещалось (хотя вообще-то она рассчитана на 4 фигурки). Однако шестой круг уже в лунку не входил, оставаясь снаружи. Это было препятствие нового рода.

Наступал интересный момент. Метод решения проблемы, который использовала Женя, показывает, что у нее уже сформировалось сохранение формы, но еще не сформировалось сохранение числа. (Первое удивительнее, чем второе: сохранение числа происходит в 5—7 лет, а сохранение формы, по Пиаже, кажется, позже 2 лет.) Конкретно, происходило следующее: Женя понимала, что этот круг тоже должен влезть в лунку, раз другие влезли. Поэтому нужно предыдущие круги вынуть и сначала положить этот, а уже потом — все остальные, вынутые круги (они уже доказали свою способность влезть в лунку, значит, про них сомнений нет — влезут и во второй раз). Вынимать фигурки у нее у самой не получалось, об этом она просила меня: «Пап, вынь, пожалуйста».

Так происходило несколько раз, но в итоге после серии неудач она начинала искать для последнего, не влезающего круга новую лунку, и когда находила, всё с большими кругами, как правило, кончалось благополучно (правда, иногда она пыталась извлечь все круги из предыдущей лунки, чтобы переложить их в новую, но тут у меня кончалось терпение, и я этому препятствовал).

К концу наших занятий пришел Дима и тоже внес свою лепту в педагогический процесс. В основном он приставал к Жене, чтобы она не клала в одну лунку пять фигурок, а в другую такую же — три, а чтобы и там, и там было по четыре. Пытался он также принудить ее класть фигурки с дырочками и без дырочек отдельно, но мне удалось уговорить его не вмешиваться, так что всё кончилось без ссор.

Так продолжалось с разными вариациями некоторое время; Женя занималась этой игрой с огромным удовольствием, сама меня об этом просила и могла просиживать за этим занятием по часу и больше. Но потом она стала играть также и без меня, причем иногда теряла фигурки. Обычно их удавалось находить, но когда один раз после более чем часовых поисков одна фигурка так и не нашлась, я спрятал набор и больше его Жене не давал. Не очень хорошо с моей стороны, но что же делать? Ведь я такого набора больше нигде не достану.

[Лето 2005 года: сейчас Жене 25 лет. Я дописываю эту книгу. Увидев у меня на столе блоки Дьенеша, Женя сказала, что до сих пор, когда она о них вспоминает, у нее просто сердце замирает от восторга.]

В последующие два года все наши занятия математикой свелись, во-первых, к чтению книги «Приключения Кубарика и Томатика, или Веселая Математика» (от которой Женя была совершенно без ума, но не от ее математической части, а от сюжета, а задачи, которые там даются по ходу дела, воспринимала как неизбежную плату за удовольствие), и, во-вторых, к попыткам прошедшим летом научить ее считать дальше, чем до двух (на трех она уже часто сбивалась): мы ей давали столько засахаренных орехов, сколько она сумеет правильно сосчитать. В результате некоторый сдвиг всё же произошел, хотя и не принципиальный.

Одна смешная история показывает, до какой степени счет в этом возрасте является чисто формальной процедурой. Однажды Женя, досчитав правильно «семь, восемь. . . », вдруг остановилась и спросила: «Но ведь семь и восемь — это одно и то же, правда, папа?» С тех пор этот вопрос служит для меня своего рода лакмусовой бумажкой. Когда мне показывают ребенка, который «умеет считать», я у него с серьезным видом спрашиваю: «Семь и восемь — это ведь одно и то же, верно?» Если он запротестует, значит, и вправду умеет считать. (Впрочем, один раз мне попался промежуточный вариант: один ребенок очень серьезно сказал мне, что нет, семь и восемь — это вовсе не одно и то же, а вот семнадцать и восемнадцать — это да, это одно и то же.)

Занятие 1. Снова феномены Пиаже

5 января 1984 (четверг) $10^{35} - 11^{15}$ (40 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Вступление. Сначала я показал девочкам свой колокольчик и объяснил, что в школе всегда бывает звонок на урок и с урока, и так же будет у нас на кружке. Потом наговорил кучу еще каких-то общих слов о том, как нам нужно всем жить дружно, хорошо себя вести и во всём слушаться меня, и тогда нам будет хорошо и весело и т. д. и т. п. Забегая вперед, должен сказать, что неожиданно для меня девочки вели себя не просто хорошо, а совершенно безупречно. В данный же момент они серьезно и внимательно меня слушали и с завистью смотрели на колокольчик.

Задание 1. Каких солдат больше?

Я стал расставлять в рядок красные фишки («солдатиков»). «А-а, знаю, сейчас считать будем!» — закричала Дина. Все наперебой закричали, что они тоже умеют считать. Я попросил Дину сосчитать солдатиков: их оказалось 9. Потом их сосчитала Саня. «Смотри, Саня, а ведь ты считала их с другого конца». — «Потому что мне отсюда ближе!» — «А почему же у тебя тоже получилось 9?» — «Потому что я считала!» Потом считала еще и Женя: «Раз, два, три, четыре, пять, шесть, семь, семнадцать, девять. Тоже девять!» Затем я поставил параллельно красным ряд желтых солдатиков. «Кого больше — красных солдатиков или желтых?» — «Никого не больше, всех поровну». — «А если они будут драться, кто кого победит?» — «Никто никого не победит».

Тогда я раздвинул желтый ряд так, чтобы он стал длиннее красного (рис. 9.1). «А теперь кого больше?» — «Желтых, желтых!» — «А если они будут драться, кто победит?» — «Желтые победят». — «Ну да, ведь побеждают те, кого больше, правда?» — «Да».

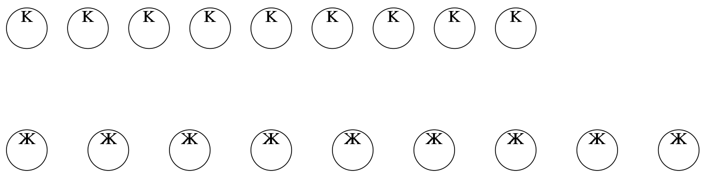


Рис. 9.1. Каких солдат больше, красных или желтых?

«Саня, забери столько желтых солдатиков, чтобы стало поровну». Саня забирает двух «лишних» солдат, мы кладем их в коробку. «А теперь кого больше?» — «Теперь опять поровну!»

Я снова раздвигаю желтый ряд. Желтых солдат снова оказывается больше, так что в случае битвы они победят красных. Мы считаем солдатиков: красных оказывается 9, а желтых 7, но желтых больше! Я прошу Женю забрать столько желтых солдатиков, чтобы их опять стало поровну с красными; она убирает одного солдатика.

Так повторяется еще пару раз; наконец, против 9 красных солдатиков стоят всего двое желтых. Дина и Саня всё еще продолжают утверждать, что их поровну, но Женя не выдерживает и заявляет: «Нет, этих меньше». — «Почему?» — «Потому что здесь ничего нет» (она показывает на пустоту между двумя желтыми фишками). Саня ее очень горячо поддерживает, а Дина смущенно замолкает: она очень вежливая девочка и не знает, как ей теперь поступить, чтобы не разрушать игру.

[Вспомним здесь Димино замечание на стр. 27: папа с этим соглашался, значит, это было правильно.]

«Да ведь вы только что говорили, что желтых больше, а теперь говорите, что их меньше!» — восклицаю я. Саня мне что-то столь же горячо возражает. Дословно воспроизвести ее рассуждения я не могу, но смысл в том, что, мол, раньше мы говорили то, что было правильно раньше, а теперь говорим то, что правильно теперь. То, что математические утверждения, верные вчера, верны также и сегодня, она еще не знает, и поэтому противоречия в своих словах не видит. «Так чтó же делать?» — спрашиваю я. В ответ Женя достает из коробки всех снятых ранее желтых солдатиков и ставит их обратно в шеренгу; солдат снова становится девять на девять. «А теперь кто победит?» — «Никто». — «Ну, раз никто не победит, то и драться незачем, и решили они мирно разойтись по домам», — заканчиваю я и собираю фишки в коробку.

Задание 2. Солдаты на табуретках.

Из другой коробки я достаю 11 фишек и 10 плашек. Объясняю девочкам, что фишки — это солдатики [почему солдатики? что-то я очень уж уклонился в военную тематику; добро бы еще занимался с мальчиками!], а плашки — это табуретки. Я предлагаю девочкам рассадить солдатиков по табуреткам. Они это делают, но одному солдатику места не хватает.

Тогда я предлагаю попробовать рассадить их как-нибудь по-другому — так, чтобы всем хватило места. Например, всех красных солдатиков посадить на красные табуретки, зеленых — на белые и т. п. Девочки охотно берутся за дело, но, к сожалению, опять один солдатик оказывается лишним. Я делаю еще какие-то предложения по их расстановке, но эффект тот же.

«Почему всё время один солдатик остается лишним!?» — «Потому что у него нет места». — «А как же их рассадить так, чтобы ему тоже хватило места?» — «Никак!» — «Что, никак не получится?» — «Да». — «А давайте попробуем вот так...» Я выдвигаю еще одно предложение (больших солдат — на белые и желтые табуретки, остальных — на остальные). А сам тем временем одного солдатика утаскиваю и прячу в карман.

Мы делаем еще одну перестановку — и на этот раз всем солдатикам достается по табуретке! Девочки очень довольны — наконец-то удалось сделать то, что требуется. Лишь одна Дина смотрит на ряд табуреток с солдатиками с оттенком легкого недоумения. Я уже совсем было собрался переходить к следующему заданию, как вдруг она сказала: «А давайте сделаем как было». — «А ты помнишь, как было?» Дина несколько сбивчиво пытается объяснить, как раньше стояли фишки. «Ну ладно, давай».

Мы начинаем снова переставлять фишки с места на место, а я по ходу дела опять тайком подставляю спрятанную фишку. И вот снова одному солдату не хватает места! Дина в полном недоумении; она пытается посадить двух солдат вместе на одну табуретку. А Саня вдруг заявляет: «А-а, я знаю, это Саша просто спрятал одну табуретку, и всё!»

Интересно: когда я сжульничал в первый раз (утащил солдатика), она этого не заметила. Подозреваю, потому, что задача «получилась» и решение найдено. Зато когда всё уже вроде бы было хорошо, и вот снова ничего не выходит, тут явно дело нечисто, и поэтому мое второе жульничество вызывает подозрения. Я, конечно, мог бы «честно» закричать, что никаких табуреток не прятал (ведь на самом-то деле я 11-го солдатика вернул обратно), но решил, что это будет нехорошо с моей стороны.

Задание 3. Четвертый — лишний.

Картинки были показаны такие:

(1) шапка, шуба, пальто, гриб	(Саня)
(2) собака, кошка, обезьяна, весы	(Саня)
(3) овца, коза, корова, катушка	(Женя)
(4) лейка, бочка, ведро, забор	(Дина)
(5) индеец, пожарник, точильщик, жираф	(Саня)
(6) цапля, сова, журавль, белка	(Женя)
(7) жук, бабочка, осы, ваза	(Дина)
(8) заяц, собака, еж, подушка	(Саня)

Первые две серии я показал девочкам всем вместе. Оба раза первой ответила Саня, причем так быстро, что Женя, как мне показалось, даже не успела еще понять, что нарисовано на картинках, а не то что подумать. Объяснения Саня тоже дала правильные. Чтобы дать возможность ответить и другим, мне пришлось установить очередь. Следующей была Женя. Я на всякий случай решил дать ей задачу попроще и положил третий набор картинок, в точности аналогичный второму. Ответ Женя дала правильный (катушка лишняя, или, как она сказала, моток), но на вопрос «почему?» ответила: «Потому что это не барашек, не коза и не корова». С помощью моих наводящих вопросов, а также подсказок Сани (что, мол, они все живые) удалось добиться от нее формулировки, что овца, коза и корова — это звери, а катушка — не зверь. Свою следующую задачу она уже решила правильно — сказала, что цапля, журавль и сова — птицы, а белка — не птица.

Все остальные ответы были правильные. Лишь один раз Дина, уже дав правильный ответ к задаче 4 (забор), попыталась образовать так называемую «фигурную совокупность» по Пиаже (т. е. нелогическую классификацию), сказав, что из лейки можно поливать забор, и из ведра тоже можно поливать забор.

Последняя, 8-я задача снова была общей, и первой опять ответила Саня. После каждой задачи я задавал однотипные вопросы, вроде: а гриб тоже можно надевать? А ваза — это тоже насекомое?

У мальчиков такие вопросы обычно вызывали бурное веселье, хохот и т. п. Девочки почему-то реагировали гораздо хладнокровнее, и только когда я после последней задачи спросил, можно ли спать на еже, они откликнулись более эмоционально.

Задание 4. Зеркальная симметрия.

На мозаике я выставил в самой середине прямую линию из фишек и назвал ее «зеркальцем». После этого я слева и справа от этой линии строил разноцветные фигурки; задание же состояло в том, чтобы с другой стороны построить фигурку, зеркально симметричную исходной. Построив каждую фигурку, мы с помощью зеркальца проверяли, получается ли совпадение построенной фигурки с той, которая видна в зеркале. Первый пример симметричной фигуры построил я сам. Женя, проследив за моими действиями, грустно сказала: «А я так не умею. . . » И в самом деле, когда до нее дошла очередь, она с заданием совершенно не справилась, хотя я построил для нее очень простую фигурку. Только помощь моя и Дины решили исход дела в положительную сторону. Дина, наоборот, сразу всё поняла и даже просила, чтобы я не показывал — она сама всё сумеет сделать. Судя по ее уверенным и правильным действиям в дальнейшем, по тому, как она отсчитывала клеточки, ее заявление вполне соответствовало истине.

С Саней чуть не возник конфликт. Она отвлеклась, спросила вдруг (показывая на колокольчик): «А можно позвонить?» Я пообещал ей, что когда кончится занятие, дам ей позвонить. Потом предложил ей смотреть, что делает Женя. Она заявила, что смотреть не будет, потому что сама всё умеет, и даже ушла из-за стола. Но потом, когда до нее дошла очередь, она с задачей всё-таки не справилась. Дина бросилась ей помогать, как и Жене, но Саня стала кричать и отталкивать Дину. [Почему же у меня осталось ощущение, что девочки вели себя безупречно? Может быть, я боялся худшего?] Как-то, однако, удалось всё уладить и сгладить и даже задачу решить.

Заключение.

С большим трудом я оттащил девочек от мозаики — они хотели играть в нее еще. Дальше была очень хлопотная процедура одевания всех на улицу (прерываемая телефонными звонками). Где-то посреди этой суеты Саня вдруг подошла ко мне и сказала: «А я знаю! И никакая это не математика!» — «А что же?» — «Ну, просто игра с папой, и всё». Я как мог попытался ее убедить, что всё это самая что ни на есть серьезная математика.

На улице Дима с Петей бросились к девочкам и стали их расспрашивать о том, что было (оба они хотели присутствовать на занятии; каждому в отдельности я бы еще может и позволил, но обоим вместе не решился). Женя закричала ликующе: «Ставили солдатиков на табуретки!» — «А-а, понимаю», — многозначительно произнес Дима.

*　　*　　*

Мы видим, что едва ли не все описанные выше задачи уже в том или ином виде фигурировали раньше. Должен ли я избегать повторений?

Немного поколебавшись, я решил, что повторения вполне законны. Это только задачи повторяются, а реакция детей — вовсе не всегда. Дети на этот раз другие.

Занятие 2. Принцы и принцессы

9 февраля 1984 (четверг) $10^{35} - 11^{10}$ (35 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Как это часто бывает в жизни, кружок, едва успев начаться, претерпел более чем месячный перерыв. Сначала мы все болели гриппом, потом я уезжал в Воронеж, и собрались мы снова лишь через пять недель. Реакция девочек на первое занятие была гораздо более благожелательной, чем когда-то у мальчиков, я бы даже сказал — восторженной. Женя и Саня всё время спрашивали, когда будет следующее занятие, и кричали ура, когда оно, наконец, было объявлено. А Дина вообще превзошла всякую меру. На вопрос, что ей больше всего понравилось из всяких новогодних мероприятий (елки, деды Морозы, театры, прогулки в лес и т. п.) она твердо заявила, что больше всего ей понравилось заниматься математикой (хотя априори никто наш кружок в число новогодних мероприятий не включал).

Задание 1. Сказка.

Я поставил на стол две большие зеленые фишки и сказал, что это король и королева. Однажды они устроили у себя во дворце веселый бал и пригласили на него много принцев и принцесс; принцы — красные фишки, принцессы — желтые. Гостей собралось много, и им было очень весело. «Интересно, — сказала королева, — а кого у нас больше: принцев или принцесс?» Она хотела их сосчитать, но это было очень трудно: они все ходили с места на место, а некоторые даже выходили из зала. (Дина пытается сосчитать принцев, но я всё время двигаю их по столу, убираю, прячу и т. д. Общий смех.) И тогда король придумал вот что. Он попросил музыкантов сыграть какой-нибудь танец. Все принцы стали приглашать принцесс танцевать (а мы ставим красные и желтые фишки парами). И вот один принц остался лишним. Но он не огорчился, а просто танцевал сам с собой, и ему тоже было очень весело. Не дожидаясь моего вопроса, девочки сами говорят, что принцев больше, а принцесс меньше.

После танца все сели за стол. (Мы расставили фишки длинным овалом, и перед каждой ставили «тарелку»: у принцев красные тарелки, у принцесс желтые.) Но оказалось, что есть пока нечего. Повар хотел приготовить каждой принцессе пирожное, а каждому принцу мороженое. Но он не знал, сколько чего готовить! Ведь он же не знал, сколько принцев, а сколько принцесс! Увидев, что еда еще не готова, все гости решили пока погулять в саду. (Мы убираем со стола все фишки, оставляя только «тарелки» и «повара». Повар — это большая зеленая фишка, но другого типа, нежели король с королевой и принцы с принцессами — погрубее и потолще.)

Что теперь делать повару? Он хотел бы сосчитать принцев и принцесс, но ведь они же ушли! Как же их теперь можно сосчитать?

Дина тотчас же стала считать красные тарелки; получилось 11. Затем их считала Женя. Сначала процессы называния чисел и тыкания пальцем в тарелки шли у нее синхронно, но потом каждый пошел своим путем, и в результате число тарелок оказалось «четырнадцать-пятнадцать». (Не следует думать, что это приближенная оценка, как бывает у взрослых: «штук эдак 14—15». Скорее это что-то вроде двойного имени, как Анна-Мария. Женя еще не знает, что при счете каждая совокупность предметов может иметь только одно имя. Кроме того, 14 и 15 — в такой же мере «одно и то же», как 7 и 8.) Потом считала Саня и получила тоже 11. Я сказал Жене: «Смотри, у девочек у обеих получилось 11. Попробуй и ты посчитать так, чтобы у тебя тоже получилось 11». Женя послушно стала считать, но у нее снова получилось четырнадцать-пятнадцать. Пришлось смириться.

Потом мы считали желтые тарелки, а я хвалил повара и говорил, что он очень умный: догадался, что принцесс столько же, сколько желтых тарелок, и поэтому можно считать не принцесс, а тарелки. Потом повар приготовил 10 пирожных и 11 мороженых, все их съели и пошли спать (в одну коробку), на чём сказка благополучно закончилась.

Задание 2. Четвертый лишний.

Как и в прошлый раз, я давал девочкам комплекты из четырех рисунков. Каждая получила по два комплекта. Все ответы были правильными, но объяснения — не всегда. Например, Женя сказала, что в наборе (голубь, еж, собака, чайник) лишний — чайник, «потому что он не летает, не колется и не лает». Я каждый раз требовал, чтобы девочки придумали одно слово, которым можно назвать и охарактеризовать все три предмета вместе (голубь, ёж, собака — живые, а чайник — нет).

В конце я сказал: «Вот нас здесь четверо за столом. Если бы нас нарисовали на картинках, кто был бы лишним?» Дина сразу ответила, что лишним был бы я, так как они трое — дети, а я — не дети. Но Женя вдруг запротестовала и сказала, что лишние — они с Диной, так как меня и Саню можно назвать одним словом — «Саша». Мне пришлось с ней согласиться; я сказал, что если искать двух лишних, то *её* ответ правильный, а если одного, то Динин.

Задание 3. Симметрия.

Я повторил то же задание, что в прошлый раз. На этот раз все трое, в том числе и Женя, справились с задачей безупречно. Женя, когда работали другие, всё время приговаривала: «Та-ак... И синенькую не забудь... Ой, не сюда, не сюда! Пра-авильно!» И тому подобное.

Я уже много раз сталкивался с этим удивительнейшим явлением, но каждый раз поражаюсь заново. Загадка природы, да и всё тут! В прошлый раз Женя с этой задачей не справлялась ну никак, ну просто ни на грамм. В промежутке я с ней ни разу ничем не занимался. Единственное, что с тех пор изменилось, так это то, что она на месяц подросла. И вот, пожалуйста — она теперь вдруг всё умеет сама. Уж какие там колесики по-другому повернулись, какие новые связи в мозгу образовались — нам остается только гадать.

Дина, сделав свое задание, сказала: «Только давайте еще будем...» Я предложил девочкам, чтобы не я им давал задачи, а они мне. Они с радостью согласились, и я решил по очереди три задачи на симметрию. Я, правда, иногда «ошибался», но девочки меня тут же поправляли.

Картинки.

В заключение я показал девочкам несколько картинок с симметричными узорами из книг «Узоры симметрии» и Г. Вейля «Симметрия». Картинки им вроде бы понравились, но еще более заинтересовали перфокарты, которые служили закладками. Саня попросила разрешения их забрать к себе домой, Дина тоже захотела (хотя Галя[1] ей напоминала, что у нее папа программист, и у них дома перфокарт полно), возник спор, дележка, и о картинках все забыли.

[1] Галя — мама Дины.

На этом занятие закончилось, Женя позвонила в колокольчик (в следующий раз очередь Дины), но Саню и Дину пришлось еще минут десять оттаскивать от мозаики и уговаривать идти домой. (Оттаскивал, разумеется, не я, а их родители.) Когда они ушли, мозаикой занялись Женя и Дима и вскоре заполнили всё поле.

Занятие 3. Сколько разниц?

20 февраля 1984 (понедельник) $16^{00} - 16^{45}$ (45 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Главной особенностью этого занятия было то, что я к нему совершенно не подготовился. Я перенес все три своих кружка — с мальчиками, с девочками и в школе — на один день, т. е. на понедельник (мой «библиотечный день» — надеюсь, читатели еще не забыли, что это такое). Поэтому непосредственно в понедельник у меня времени на подготовку не было. А три предыдущих дня я без продыха занимался корректурой нашей статьи с Мишей Шубиным, которая, как обычно, должна была быть окончена «вчера». В результате занятие получилось в целом бессвязным и не очень удачным.

Задание 1. Четвертый лишний.

Я даже не успел выбрать из коробки нужные задачи. Однако это обстоятельство в итоге повернулось мне на пользу: я предлагал девочкам тянуть себе задачу из коробки, как лотерейный билет; все трое решали свои задачи не по очереди, как в прошлые разы, а одновременно. Женины объяснения остаются такими же, как прежде. Получив набор (капуста, огурцы, щавель, водопроводный кран), она говорит, что лишний — кран, потому что он «не капуста, не огурцы и не листочки». Я предположил, что, может быть, лишняя капуста: ведь она не огурцы, не кран и не листочки. Или нет, наверное, лишние огурцы (по аналогичной причине); а может быть, листочки... В ответ на мои издевательства Женя мрачно заявила: «Нет, лишний кран!» Можно считать, что я наткнулся на своеобразный возрастной период: Женя всегда дает правильные ответы, но еще совершенно не может их объяснить. Более младшие дети ответы дают наугад, так как не понимают смысла задачи. А более старшие (например, Дина и Саня) уже дают и правильные объяснения тоже.

Задание 2. Все лишние по очереди.

Я достал свой излюбленный набор из четырех предметов, в котором каждый из предметов может быть сделан лишним: три квадрата — один треугольник, три без дырки — один с дыркой, три красных — один зеленый, три маленьких — один большой (рис. 9.2).

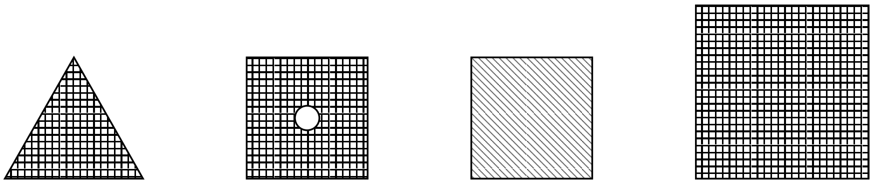


Рис. 9.2. В зависимости от критерия каждая из фигурок может считаться лишней.

Мнения тотчас же разделились. Женя считала лишним тот, что с дыркой, а Саня и Дина — треугольник. Я попробовал предложить третий вариант, но все девочки твердо стояли на своем и кричали каждая свое. Пришлось мне пойти на хитрость и предложить им поступить «по справедливости»: пусть каждая фигурка по очереди будет лишней. На это девочки согласились. Интересно, что они никак не могли придумать, почему зеленая фигурка лишняя; и то же самое было в следующей задаче — тоже разницу в цвете они долго не замечали. А я думал, что это будет первое, что бросится в глаза. Но, так или иначе, в итоге все четыре объяснения были найдены.

Задание 3. Сколько «разниц»?

Я достал четыре фигурки из набора Дьенеша и предложил опять найти лишнюю. Набор был выбран не очень удачно: лишними могли быть названы две фигурки (т. е. задача имела два правильных решения). Возник спор. Кроме того, вообще эти задачи им уже надоели. Я пустился в какие-то длинные рассуждения о признаках (форма, цвет, размер и т. п.) Было занудно, и девочки смотрели по сторонам. Тогда я понес совсем какую-то ахинею: положил на стол большой красный квадрат и попросил положить рядом с ним самую похожую на него фигурку. Сначала всё шло относительно благополучно: рядом друг за другом легли все четыре больших квадрата без дырок. Но тут-то и выяснилось, что девочки задачу либо не понимают, либо забыли вопрос, так как они стали строить какой-то домик на колесах — сверху треугольники, снизу круги. Я пытался убедить их класть фигурки в одну линию, иногда вякал что-то про «неправильное решение», но ничего не помогало. Росла моя досада на себя самого, что не подготовился — и это тоже отражалось на общем настроении.

Тогда я взял в руки две фигурки, отличающиеся всего одним признаком, и попросил указать разницу между ними. Это было сделано. Следующие две фигурки отличались уже тремя признаками. Я спросил, «сколько разниц».

Сначала девочки нашли только одну разницу, а в качестве второй смогли лишь сказать, что «они непохожи». Потом, после некоторого размышления, удалось обнаружить еще две разницы. Труднее всего, как я уже говорил выше, оказалось обнаружить различие в цвете. Я похвалил девочек. Дело, кажется, начинало налаживаться. Следующие две фигурки отличались уже всеми четырьмя признаками. Первую разницу нашла Дина, вторую Женя. Я обратился к Сане. Та встала и даже покраснела от натуги, но ничего найти не смогла. «Думайте, думайте», — сказал я всем. Тут вдруг Женя нашла третью разницу и тут же четвертую. Я ее похвалил и стал распространяться о том, что вот как много! целых четыре разницы! — стал их снова перечислять и т. п. Увлекшись этими разглагольствованиями, я не заметил, что Саня ужасно надулась. Тут Катя[2] спросила ее: «Санечка, ты что?» В ответ Саня вдруг безумно зарыдала и закричала: «Должна я-а-а была найти!!»

Все стали ее наперебой успокаивать, а ей только того и надо — ревет еще громче. Спасла дело только демагогия. Я спросил: «Саня, а сколько людей за столом?» — «Три-и-и». — «Как так три? А кто же не человек?» — «Четыре». — «Вот видишь: четыре человека — и четыре разницы, всем по одной. Так что всё по справедливости». К этому моменту она забыла, что ей-то как раз ни одной и не досталось, и буря улеглась.

Задание 4. Симметрия относительно диагонали.

На этот раз я усложнил задачу о симметрии тем, что в качестве оси симметрии взял диагональ мозаики. Я не был заранее уверен, что эта задача пойдет легко, и поэтому сначала девочки давали задания мне. Однако оказалось, что они всё хорошо понимают. Под конец я даже позволил себе ошибиться, и Саня с воплем триумфа мою ошибку исправила.

Затем девочки сами выполняли мои задания и справились с делом вполне успешно. Как всегда, когда дело касается мозаики, стоило больших трудов ее у них забрать.

Японский волчок.

За неимением других задач я показал, как вращается и вскакивает на ножку японский волчок. На Катю это произвело более сильное впечатление, чем на девочек.

Задание 5. Укладка фигур Дьенеша.

В заключение я попросил девочек собрать фигурки Дьенеша в планшет, но так, чтобы фигурки с дырками и без дырок лежали отдельно друг от друга. Они всё сделали, как надо, хотя руки у них при этом дрожали, так как каждая хотела опередить остальных и ухватить себе фигурок побольше.

[2]Катя — мама Сани.

Под конец они догадались набирать сразу много фигурок в руку, чтобы был гарантированный запас (а то, пока я буду класть эту фигурку, остальные всё расхватают), и это слегка ослабило напряжение.

На этом всё и кончилось, только Саня устроила небольшой дополнительный скандал — она требовала от меня домашнего задания (чтобы, как Петя, что-нибудь писать в тетради — буквы или цифры), а я ничего разумного и устраивающего ее не мог придумать.

Занятие 4. Построение по чертежу

12 марта 1984 (понедельник) $16^{00} - 16^{45}$ (45 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. C_5^2 на мозаике.

Задание состояло в следующем: на той же мозаике, на которой мы строили симметричные фигуры, мы стали делать бусы. В каждых бусах должно быть ровно 5 бусинок, причем обязательно 2 красных и 3 белых. При этом, разумеется, все бусы должны быть разными.

Девочки на удивление успешно справлялись с задачей, не уступая первоклассникам (из Диминого класса). Правда, они редко сами спонтанно обнаруживали совпадение двух решений; поэтому я после каждого очередного ответа просил всех внимательно смотреть, не получилось ли то же самое, что уже было. Тогда они принимались за изучение того, что было, и обычно находили ошибку сами. Впрочем, иногда они считали совпадающими симметричные бусы. Только поиск 9-го решения, который достался Жене, вызвал у неё серьезные трудности. Если бы я занимался с ней одной, я думаю, что она в итоге решила бы задачу сама. Но тут получалось так, что Женя долго перебирала разные варианты, уже стала повторяться, а Дина и Саня скучали и отвлекались. Так что я Жене осторожно подсказал, куда поставить одну из фишек, и она тотчас нашла правильное решение.

А последнее, 10-е решение я нашел сам. При этом медленно и последовательно перебирал все варианты, пока не нашел нужный. А девочки помогали мне искать для каждого варианта тот, что с ним совпадает. Находка каждый раз сопровождалась бурей восторга. Конечно, надо было попытаться найти еще и 11-е решение, но я почему-то не сообразил это сделать.

Задание 2. Четвертый лишний.

Игра протекала как обычно. Я старался требовать от девочек «одного слова», которым можно было бы назвать все три не лишние картинки. Один раз Женя получила четыре картинки (чашка, чайник, ваза, заяц) и закричала радостно: «Ой, сразу три лишние!» Видимо, я уже успел приучить их к тому, что не лишние обязательно живые.

Задание 3. Построение по чертежу.

На стр. 195 и следующих я описывал головоломку «пифагор» и некоторое количество связанных с ней задач. С тех пор у нас появилась другая версия той же игры: тоже семь фигурок, но другой формы, и заполняют они не квадратное, а прямоугольное поле. За неимением другого названия я буду называть ее «венгерский пифагор» (просто удивительно, сколько замечательных вещей нам привезли из Венгрии). Форма фигурок и их расположение в коробке показаны на рис. 9.3.

Задачу, связанную с этим набором, мне фактически подсказала Женя. Она играла с фигурками, по-разному перекладывая их на столе, а потом я попросил ее собрать их обратно в коробку. Это ей не удалось. Тогда я показал ей рисунок, где показано, как следует их укладывать (это тот же самый рис. 9.3). Оказалось, что и складывание по рисунку вовсе не так уж просто, хотя всё же посильно: Женя поднатужилась — и после некоторых усилий всё сложила.

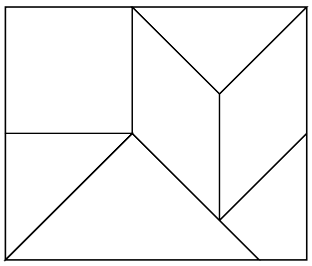


Рис. 9.3. «Венгерский пифагор». Пластмассовые плашки складываются в прямоугольную коробку в соответствии с этим чертежом.

Этот успех так ее воодушевил, что она высыпала фигурки из коробки и снова принялась их укладывать. Как ни странно, во второй раз у нее ничего не получилось: она положила рисунок горизонтально, а коробку вертикально, отсюда и неудача. Пришлось ей помогать.

В результате у меня возникла идея: нарисовать несколько простых чертежей и дать их девочкам складывать в порядке возрастающей трудности. Я подготовил 10 задач, из которых были решены 6 (рис. 9.4).

Последняя, 6-я задача, вызвала у Дины трудности и потребовала подсказки. Женя справлялась с задачами так же хорошо, как и остальные. Было

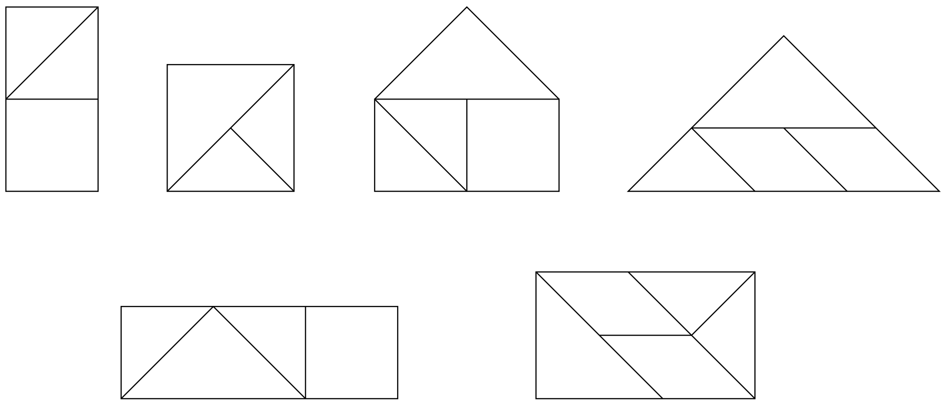


Рис. 9.4. Из плашек «венгерского пифагора» требуется сложить нарисованные здесь фигуры.

приятно смотреть, как она цепким взглядом охватывала рисунок, а потом отбирала из кучи фигурок только нужные и быстро и ловко всё складывала.

В конце занятия я было похолодел от ужаса, вспомнив, что обещал Сане письменное задание домой, а сам ничего не приготовил. Но Саня, слава богу, ни о чём не вспомнила, так что занятие кончилось вполне благополучно.

Занятие 5. Перестановки

19 марта 1984 (понедельник) $16^{00} - 16^{50}$ (50 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Это занятие вышло не очень удачным. Во-первых, я слегка переборщил в сложности задач, и с несколькими задачами девочки не справились, что вызвало соответствующую фрустрацию. Во-вторых, было много споров, обид и т. д.

Задание 1. Перестановки.

Мы снова стали делать бусы — на этот раз всего из трех бусинок, причем все три бусинки разноцветные: одна красная, одна синяя и одна желтая. Девочки вполне справились с задачей, найдя все 6 решений. Я сам попытался у них на глазах найти 7-е решение, аккуратно и по очереди перебирая все варианты. Каждый раз, когда оказывалось, что очередной вариант снова совпал с каким-то из уже построенных решений, это вызывало такой восторг, что у меня порой даже уши закладывало.

Задача кончилась, но девочки не хотели расставаться с мозаикой, так что мне пришлось продолжить и дать им возможность строить четырехцветные бусы из четырех фишек. Это задание оказалось для них трудноватым, так как для бус с четырьмя фишками они с трудом определяли, совпадают два решения или нет. В основном они ориентировались на положение синей фишки как наиболее заметной. Таким образом, построив всего 7 решений (из 24 возможных!), мы задачу прервали.

Дина устроила себе дополнительное развлечение — строила бусы, симметричные Саниным. Но когда она об этом сказала вслух, Саня заявила самый решительный протест.

В процессе игры возник спор между Женей и Саней из-за очереди. Я сказал, что следующей будет та, кто меньше просит и тише себя ведет. Обе девочки моментально затихли, так что снова невозможно было определить, кто же лучше себя ведет. Чтобы никого не обидеть, я решил бросить монетку. Монетка выпала на Женю. Саня, конечно, тут же зарыдала. Я стал спрашивать, на кого она обиделась; предложил ей монетку нашлепать (что и было исполнено). Дина очень смеялась и говорила: «Саня, монетка же глупая!» Удивительно еще, что Женя не встряла и не заявила, что монетка умная.

Задание 2. «Четвертый — лишний».

Возможно, у меня просто ворчливое настроение, но факт тот, что сегодня все девочки давали такие объяснения, которые раньше давала одна Женя: топор лишний, потому что он не бабочка, не жук и не пчела. Я над ними над всеми ехидничал, называл других кандидатов в лишние (с аналогичными объяснениями), но это мало что меняло.

Интересно, что на протяжении всех занятий практически не было осечек с ответами: ответы всегда правильные.

Задание 3. Построение по чертежу.

Неудача Дины в прошлый раз с 6-й задачей должна была бы меня насторожить, но мне показалось, что все будет окей. Из десяти задач на сегодня осталось четыре. После некоторых споров и склок девочки выбрали себе по задаче (рис. 9.5).

Однако справилась со своей задачей только Дина. У Сани вообще не получилось ничего похожего. При этом я ей пытался подсказать, но она меня не стала слушать, а стала петь и делать вид, что ей всё нипочем. Катя очень обеспокоилась, хотела тоже ей помочь, но, увидев задачу, даже присвистнула. Тут и Дина бросилась на помощь, но Катя ее слегка притормозила, а Саня заявила, что не хочет решать задачу, и мы от нее отстали.

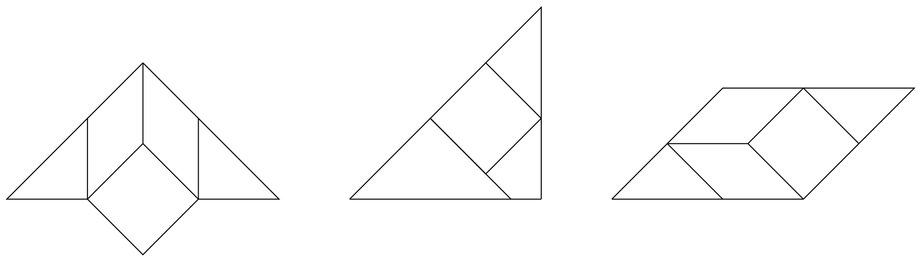


Рис. 9.5. Вот какие задачи выбрали себе девочки: Дина — слева, Саня — в центре, Женя — справа.

У Жени положение было поначалу несколько лучше: она положила правильно четыре плашки из пяти, но никак не могла приладить последний треугольник. Вдруг она обиделась и сказала, что я ей даю очень трудные задачи. Я пытался оправдываться, что, мол, трудные задачи интереснее решать, но она твердо ответила: «Нет, не интересно!» Только Дина меня поддержала, сказав, что любит трудные задачи.

В общем, мы остановились на том, что после занятия девочки (кто захочет) попробуют решить эти задачи все вместе. Однако после занятия Женя мне сказала, что ей уже расхотелось.

Задание 4. Симметрия на клетчатой бумаге.

Эта серия задач аналогична тем, которые мы раньше решали на мозаике, только на этот раз я нарисовал ось симметрии черным фломастером на листе клетчатой бумаги. Потом я разными фломастерами (по выбору девочек) рисовал около оси разные фигурки, а они рисовали симметричные. В целом с этой задачей все справились. Правда, аккуратно по клеточкам рисовала одна Дина, а Саня и Женя лишь улавливали общий контур рисунка. Один раз Женя ошиблась, но очень своеобразно: нарисовала фигуру, центрально-симметричную исходной.

Занятие 6. Порядок утренних дел

29 марта 1984 (четверг) $10^{30} - 11^{30}$ (1 час)
(Женя, Саня, Дина)

Содержание этого и следующего занятий я записываю почти через месяц (24 апреля), так что многие подробности из памяти уже стерлись. Думаю, что запись этого занятия окажется короче, чем предыдущие.

Задание 1. Построение по чертежу.

Я решил, несмотря ни на что, не отступать и довести оставшиеся две задачи до победного конца. В целом это мне удалось. Решали каждую задачу девочки все вместе. Были, конечно, споры и драки за фигурки, но в общем всё обошлось благополучно, и — главное — обе задачи были-таки решены, причем без моей помощи.

Задание 2. Повторение узора на мозаике.

Я строил на мозаике фигурку из 3—5 фишек, а девочки должны были с помощью параллельного переноса сделать узор («ленту»), многократно повторяющий заданную фигурку. Все справились с заданием успешно.

Задание 3. Четвертый лишний.

На этот раз мы эту игру закончили, исчерпав весь запас картинок. Теперь можно только заказывать картинки Алле, либо играть не с картинками, а с предметами. Можно также использовать схему этой игры для отыскания других, более «математических» закономерностей (например, три треугольника и один четырёхугольник и т. п.)

Задание 4. Утро мальчика.

На серии карточек-картинок изображен мальчик, занимающийся разнообразными утренними делами: он завтракает, одевается, делает зарядку, стелет постель, спит, просыпается, умывается, гуляет на улице с санками, одевается на улицу. Надо разложить картинки в порядке очередности исполнения перечисленных дел: сначала спит, потом просыпается и т. д. По содержанию девочки справились с задачей вполне успешно. Были, однако, некоторые спорные моменты. Например, что раньше: стелет постель или завтракает? Я пытался получить на такие вопросы «логические» ответы (например, такие: стелет постель мальчик еще в пижаме, а завтракает уже одетый). Однако получаемые мной ответы были, в основном, другого типа («мама всегда так делает», «умные дети должны сначала стелить постель» и т. п.) Мои ответы вовсе не казались девочкам более «объясняющими». Вопрос «откуда вы узнали?» тоже мало помогал.

Многогранники.

В заключение показал девочкам картинки из книжки М. Веннинджера «Модели многогранников». Из всех картинок кое-какое впечатление произвели только наиболее звездчатые фигуры, остальные оставили зрительниц совершенно равнодушными. Что касается Жени, то мы с Аллой заметили, что, при всей ее любви к разглядыванию картинок, ее интересуют только сюжетные картинки, где с кем-то что-то происходит. Такие картинки могут быть любого качества — черно-белые, штриховые и т. п. В то же время роскошные, ярко-цветные фотографии или рисунки бабочек, ракушек, попугаев, которые кажутся мне совершенно неотразимыми, нисколько ее не увлекают.

Занятие 7. Игра побеждает науку

9 апреля 1984 (понедельник) $16^{00} – 16^{40}$ (40 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Симметрия на клетчатой бумаге.

Повторения задания № 5-4. Женя еще раз подтвердила свою склонность рисовать центрально-симметричные фигурки вместо осе-симметричных. Ни у кого из мальчиков это явление не встречалось; наоборот — центральная симметрия всегда была, да и мне казалась, более трудной.

Задание 2. Ошибки в симметрии.

На листе бумаги нарисована ось симметрии и по обе стороны от нее — симметричные фигуры. Однако некоторые фигуры нарисованы с ошибками (рис. 9.6). Требуется эти ошибки указать.

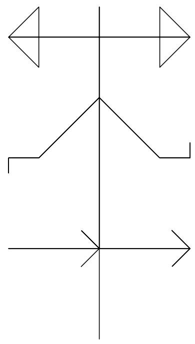


Рис. 9.6. Этот рисунок симметричен относительно вертикальной оси, но имеются некоторые «ошибки».

После этой задачи я дал еще одну, аналогичную первой, в которой фигуры к тому же еще были разноцветными, так что требовалось учитывать также ошибки в цвете (симметричные части фигур должны были быть нарисованы одинаковым цветом).

Как всегда, в решении задачи Дина опережала других. Саня же всё больше «придиралась» и показывала несуществующие ошибки, связанные с тем, что рисунок был не идеально аккуратный.

Задание 3. Неупорядоченные пары.

Когда мы строим последовательность фишек на мозаике, то волей-неволей приходится считать различными те последовательности, в которых совпадают цвета, но различается порядок их появления в последовательности. Думаю, было бы затруднительно объяснить девочкам такое правило: «Давайте, мол, пару (красный, синий) и пару (синий, красный) считать одинаковыми, потому что то-то и сё-то».

Для такого отождествления пар цветов с точностью до изменения порядка оказалось удобным использовать набор двухцветных пластмассовых кубиков. Каждый кубик состоит из двух половинок, так что его можно сделать сплошь красным, красно-синим, красно-желтым и т. д. Всего цветов 4 — красный, синий, желтый и черный, поэтому возможны 6 различных двухцветных кубиков и еще 4 одноцветных (рис. 9.7).

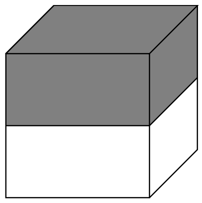


Рис. 9.7. Эти кубики складываются из двух пластмассовых половинок. В задаче предполагалось, что порядок цветов не учитывается, т. е. красно-синий кубик — это то же самое, что сине-красный. В этом случае возможны 10 различных комбинаций цветов.

Девочки хорошо справились с задачей, но ни за что не хотели расставаться с кубиками (кубики в самом деле очень красивые — с ярким, насыщенным цветом). После двухцветных кубиков они сначала сделали все одноцветные, а потом снова стали складывать такие же двухцветные кубики, какие уже были, только класть их иначе. Сначала я пытался спорить, призывать в свидетели общественное мнение. «Давайте посмотрим, может, такой кубик уже был». Те девочки, что ждали своей очереди, охотно показывали: «Вот он». Но та, что делала новый кубик, не соглашалась: «Нет, здесь красный сверху, а у меня сбоку!»

В итоге мне пришлось сдаться и изменить условие задачи: мы стали класть каждый кубик во всех возможных положениях. (Что, между прочим, подсказывает идею новой задачи: брать разные не идеально симметричные фигурки и класть их в различных возможных положениях. Один из вариантов — кубик, разделенный пополам плоскостью, проходящей через диагонали противоположных граней; такие кубики можно делать из другого набора, помельче и не такого красивого (рис. 9.8)). Однако, решив и вторую задачу, девочки продолжали складывать кубики снова и снова, и остановить их уже не было никаких сил.

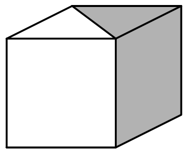


Рис. 9.8. Задача: положить вот такие двухцветные кубики на стол во всех возможных положениях. Решений 12 — см. стр. 323.

Картинки-паркеты.

Следующим пунктом моего плана должен был быть показ картинок-«паркетов» — т. е. замощений плоскости одинаковыми фигурами — из книги Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп». Я подсовывал картинки девочкам под нос, звал их, пытался сам рисовать на бумаге паркет из стрелочек, как на рис. 9.9, но никто не обращал на мою суету ни малейшего внимания: мои ученицы продолжали строить разные заборы и дворцы из кубиков предыдущей задачи. Даже паркет из ящериц М. Эшера не вызвал никакого интереса. Повторилась та же сценка, что когда-то произошла в одном моем «постороннем» кружке с чужими детьми (я о нём ничего не пишу, т. к. от него не сохранилось никаких записей). Видимо, задание с такими красивыми кубиками может быть только самым последним.

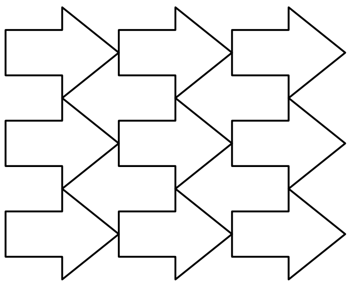


Рис. 9.9. Замощение плоскости одинаковыми стрелками.

Из паркетов можно было бы соорудить более интересную задачу, если бы не полениться и вы́резать, скажем, из картона много одинаковых фигурок — квадратиков, шестиугольников, стрелочек и т. п., или даже ящериц Эшера. Вот уж тогда заполнение плоскости одинаковыми ящерицами могло бы произвести настоящий эффект!

Занятие 8. Между двумя зеркалами

1 мая 1984 (вторник) $18^{30} – 19^{15}$ (45 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Длительный перерыв был связан с моей командировкой.

Задание 1. Пары фишек на мозаике.

Задача состояла в том, чтобы построить все различные пары фишек с учетом порядка цветов (причем одноцветные пары тоже допускались). Всего имеется 5 цветов фишек, так что задача имеет 25 решений.

Девочки очень хорошо справлялись с задачей. Они нашли совершенно самостоятельно 24 решения, и только одно последнее я построил сам. При этом они мгновенно находили повторы, если их кто-нибудь допускал, а также постоянно указывали симметричные решения: «Эта — это перевернутая вот эта. . . » В заключение я еще попросил Дину сосчитать количество решений, что и было исполнено.

Задание 2. Найти отличия между картинками.

Даются две картинки с нарисованными на них (и одинаково расположенными) фигурками. Нужно найти те немногие отличия между этими картинками, которые имеются (рис. 9.10). Задач такого типа было две (т. е. две пары картинок).

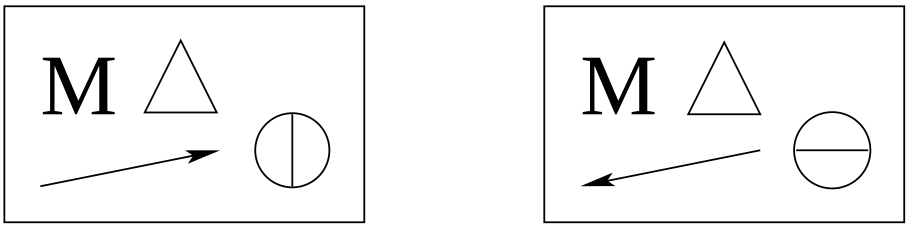


Рис. 9.10. Найти все отличия между этими картинками.

Задание 3. Перечислить цифры по порядку.

На листе бумаги, разделенном на 10 частей, вразброс написаны цифры. Надо их показывать и перечислять по порядку. Почему-то особенное веселье вызвало то, что ноль оказывался всегда самым последним. Дина даже хотела было начать с нуля, но потом сказала: «Нет, пусть лучше будет смешно», — и начала, как все, с единицы.

Задание 4. Продолжить узор на клетчатой бумаге.

Задание, аналогичное № 6-2, только не на мозаике, а на клетчатой бумаге. Я рисовал начало какого-нибудь узора (или «забора»), а девочки должны были рисовать продолжение (рис. 9.11).

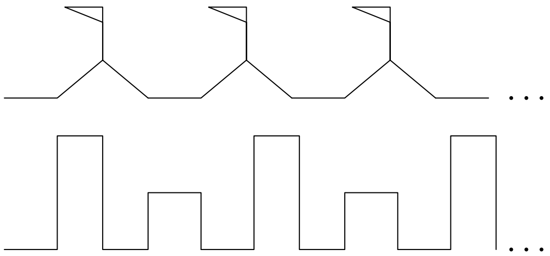


Рис. 9.11. На клетчатой бумаге дается начало узора; требуется его продолжить.

Строго по клеточкам рисовала одна Дина, а Саня и Женя лишь правильно повторяли общий контур рисунка. Тем не менее с точки зрения «угадывания закономерностей» они тоже решали задачи правильно. Интересно, что и в этой, и в других задачах *на мозаике* девочки правильно повторяли не только общую структуру узора, но и метрические соотношения, а на клетчатой бумаге это им не удается. Может быть, дело в том, что число (в данном случае — количество фишек) усвоено ими лучше, чем более трудное понятие длины?

◁ Про нижнюю фигурку рис. 9.11 интересно, что всегда на уроках я начинаю ее рисовать на полях, когда скучаю, и получаю от этого какое-то иррациональное удовольствие — не знаю, связано ли это с кружком. — Женя. ▷

Игры с двумя зеркалами.

Сначала я взял два маленьких плоских зеркала (к сожалению, нет у меня зеркал среднего размера) и показывал на столе, что будет, если фишка, скрепка и т. п. отражаются в обоих зеркалах вместе, а также что будет, если менять угол между зеркалами. Потом мы пошли в коридор, я принес из кухни второе большое зеркало, и девочки встали между двумя параллельными зеркалами, с большим интересом наблюдая длинную цепочку уходящих в бесконечность своих повторений.

Это развлечение было встречено с большим восторгом и вообще с большим подъемом.

Занятие 9. Во дворе

7 мая 1984 (понедельник) $18^{30} - 19^{15}$ (45 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Погода была дивная, теплая и солнечная, и жалко было забирать девочек с улицы. Сначала я решил, так же, как и в прошлый раз, перенести занятие с 16^{00} на 18^{30}. Потом, когда уже и это более позднее время стало приближаться, а на улице по-прежнему было очень хорошо, у Аллы возникла идея провести *занятие на улице*! Программа была сочинена на ходу. Не всё получилось удачно, но сам факт разнообразия следует приветствовать.

Задание 1. Сколько шагов от будки до будки?

В нашем дворе имеется детская площадка, а чуть в стороне от нее расположены две большие бетонные трансформаторные будки; пространство между ними заасфальтировано.

Сначала девочки всё пытались расположиться вокруг какой-нибудь плоской поверхности вроде стола. В основном в этом качестве служила приступка к одной из будок. С трудом мне удалось переключить их внимание на себя.

Я попросил их попытаться угадать, сколько шагов будет от одной будки до другой. Девочки стали называть самые фантастические числа, причем одна и та же из них вполне могла сказать «20» и через секунду «100».

После этого мы стали измерять расстояние шагами. Первой пошла Дина, но она стала отмерять не шаги, а ступни, и дело затянулось. Второй пошла Женя. Она очень характерно считала шаги. Сначала на каждый шаг — счёт; затем, когда пошли числа подлиннее, соответствие потерялось: пока она произносила «двадцать четыре», она вполне могла пройти 3—4 шага. Наконец, она вошла в область чисел, которые вообще нетвердо помнила. Получалось вот что: Женя мучительно пытается вспомнить следующее число, а ножки тем временем всё идут и идут, отмеряют шаги.

◁ У меня с этим до сих пор трудности, по-моему... — Женя. ▷

Дима припрыгивает вокруг и как всегда очень занудно пытается втолковать Жене, что она всё делает неправильно. Она от него отмахивается: «Ну, Дима, Дима, не мешай!», — и вообще забывает, на каком числе остановилась. «Сколько там было, пап?», — спрашивает она меня, наморщив лоб. Я отвечаю: «Тридцать шесть». — «А как дальше, пап?» Тут ей пытается подсказать Дина, но Женя буквально взрывается от возмущения: «Ну, Динка! Не у тебя спрашивают!» И вот в течение всего этого диалога с четырьмя участниками она не останавливается, а всё продолжает аккуратно ставить ногу за ногу.

Затем то же самое, хотя и в меньшем объеме, повторилось с Саней. Числа у всех девочек получились существенно различные. Мы попытались сравнить у каждой из них то число, которое получилось, с тем, которое было «предсказано» (и которое они, конечно, уже забыли). Но операция сравнения имела для них мало смысла; единственный вывод, который они извлекли из нее, состоял в том, что они угадали неправильно. Саня очень оскорбилась и стала заново шагать и считать для того, чтобы на этот раз получилось столько шагов, сколько она предсказала. Я ее едва утихомирил тем, что она ошиблась меньше всех (это правда).

В заключение я решил развеселить девочек и стал тоже мерить этот пролет своими шагами, причем стал делать шаги огромного размера. Все просто покатывались со смеху, однако без всяких математических выводов — что, мол, число шагов зависит также и от длины одного шага. Когда же я в последний раз шагнул прямо на стену, это вызвало уже совсем полную бурю.

Задание 2. Построить башенку такой же высоты.

Я попытался дать девочкам то же задание, что когда-то давал мальчикам: на столе (в данном случае на приступочке) строится башенка из кубиков; нужно на полу построить башенку такой же высоты. Результат был естественным: они все пытались строить башенку, достигающую такого же уровня по горизонтали (рис. 9.12).

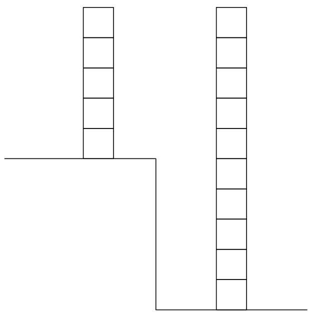


Рис. 9.12. Девочки считают, что эти башни имеют одинаковую высоту.

Однако устроить на эту тему какое-нибудь обсуждение не удалось, так как обе башенки постоянно сдувало ветром (да и поверхность асфальта была неровная). Пришлось это дело отложить.

Кстати, мне сейчас пришла в голову мысль, что эту задачу следует проводить по-другому. В качестве исходной надо построить башенку на полу — причем обязательно ниже стола. Тогда вторую башенку (на столе) никак не удастся сделать доходящей до того же уровня. Есть надежда, что в этом случае ее действительно сделают той же высоты — например, из того же количества кубиков. А после этого надо попросить построить третью башенку, снова на полу и такой же высоты, как вторую. Любопытно будет потом сравнить первую с третьей.

[Какая свежая мысль, не правда ли? Тот факт, что она мне когда-то уже приходила в голову, и даже уже была опробована с мальчиками (стр. 119), видимо, тоже сдуло ветром.]

Задание 3. План детской площадки.

Работа над этим заданием оказалась до невероятности забавной: даже сейчас, через двадцать лет, вся картина стоит у меня перед глазами словно живая.

Мы прошли все вместе на детскую площадку. Я попросил девочек запомнить всё, что на ней есть — качели, скамейку, песочницу, «лазилки», дорожки и т. п. — и запомнить к тому же, как всё это расположено. Я сказал им, что им сейчас надо будет всё это нарисовать так, как это «видно сверху», как если бы они были птицами.

Потом мы вернулись на асфальтовый пятачок между будками, каждая из девочек получила кусок мела, и все принялись рисовать *план* (или *вид сверху*) детской площадки. В процессе работы разрешалось при желании сбегать еще раз на площадку, чтобы освежить ее в памяти.

Лучше всех с заданием справилась Саня. Она изобразила вполне приличный план, на котором были правильно расположены почти все важные детали. Недоставало песочницы; я спросил у Сани, где песочница, и она нарисовала ее на правильном месте.

Дина, по-видимому, поняла смысл задачи лучше остальных. Она взялась за дело с необычайной дотошностью. Сначала она долго и аккуратно чертила скамейку, которая имела Г-образную форму (рис. 9.13).

Потом она долго и обстоятельно мне объясняла, что у скамейки при взгляде сверху не видны ножки, и поэтому их рисовать не надо. Потом, пояснив, что скамейка зеленая, попросила у меня зеленый мел и стала аккуратно ее закрашивать. Когда же, покончив со скамейкой, она принялась изображать качели (вид сверху которых довольно-таки нетривиален), всю

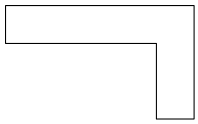


Рис. 9.13. Так выглядит скамейка, если смотреть на нее сверху.

работу уже пора было кончать, так как Саня давно уже всё кончила и рвалась в бой, а Женя тоже давно ушла не в ту степь. Дина очень расстроилась, просила разрешения доделать работу, но дело было безнадежное — ей бы и двух часов не хватило.

Женя начала работу вполне правильно. Секунда — и на асфальте появился большой круг, изображающий песочницу. Тут же рядом появились совок с ведерком, потом мальчик и девочка, играющие в песок, потом кукла, которую девочка уложила спать... Я попытался сбить ее с этой сюжетной линии и спросил, где качели. Два-три стремительных штриха — и появились качели. Мальчик и девочка пошли кататься на качелях, но тут начался дождь; они побежали домой, совсем забыв про куклу... Одним словом, в мгновение ока она буквально «сплела» целую историю, совершенно при этом забыв и про двор, и про план, и вообще про математику.

Что тут можно добавить? Это ровно один из тех случаев, когда я не могу отличить поражения от победы. С одной стороны, если подходить к делу с чисто математических позиций, по крайней мере две участницы из трех с заданием не справились. Но, с другой стороны, это такое ни с чем не сравнимое удовольствие — видеть столь ярко, столь выпукло все характеры, темпераменты, все три личности, что математика тут отступает куда-то в задний угол. Так и хочется сказать: да ну ее к черту, вашу математику! *Дети* гораздо интереснее.

Опыты с магнитами.

В заключение я показал детям несколько «фокусов» с магнитами. Один состоял в том, что один магнит «убегал» от другого (он лежал в кузове маленького грузовичка, и при попытке поднести к нему сзади большой магнит грузовичок начинал уезжать). Во втором фокусе кнопки, скрепки и другие мелкие железки бегали по вертикальной картонке, управляемые сзади магнитом.

Девочки догадались, что дело в магните, да я и не скрывал.

В целом занятие было довольно сумбурным. Из-за всё той же хорошей погоды во дворе было полным-полно детей с родителями и бабушками. Куча народу толпилось вокруг нас, дети вмешивались, просили тоже дать им мел, девочки им кричали: «Это не ваш кружок, а наш!». Приходилось наставлять их в вежливости. Да и одних только «своих» зрителей хватало: кроме меня — три мамы и Дима с Петей.

Закончилось это занятие несколько неожиданно: оказалось, что пока Дима вертелся около нас, у него украли велосипед! Начались поиски, которые продлились два часа. Это была целая детективная история с привлечением дворовых мальчишек, которые нам помогали. Дима был чрезвычайно впечатлен — не столько тем, что велосипед украли, сколько тем, что нам удалось его найти. Телевизора у нас дома нет, никаких детективов он никогда не видел, и потому всё удивленно спрашивал: а что, милиционеры тоже та́к ищут?

Недели через две Женя мне по какому-то поводу сказала, что заниматься кружком дома ей нравится больше, чем во дворе. Что лишний раз доказывает склонность детей к рутинным процедурам. (Ср. с Диминым замечанием на стр. 72.)

Занятие 10. Расположение двухцветных кубиков

14 мая 1984 (понедельник) $16^{00} - 17^{00}$ (1 час)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Устные вопросы.

(1) Я еду на работу сначала на автобусе, потом на троллейбусе, потом на метро, а потом на трамвае. Как я еду обратно?

Дина отвечала правильно, а Женя с Саней — то впопад, а то невпопад, и трудно было понять, отчего: то ли случайно ошибаются, то ли неправильно решили задачу.

(2) Как называется:

много коров?	—	стадо;
много птиц?	—	стая;
много лошадей?	—	табун (этого слова девочки не знали);
много цветов?	—	букет;
много овец?	—	отара (этого тоже не знали);
много спортсменов	—	команда

и так далее в том же духе (много посуды, много учеников, военных, рабочих, книг, самолетов, деревьев, ...).

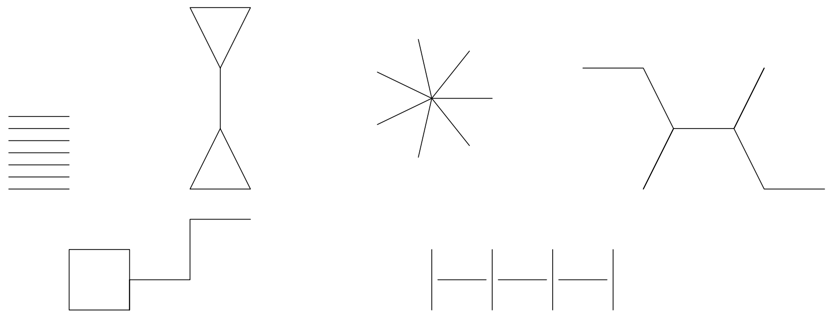


Рис. 9.14. Все эти фигурки сделаны из семи спичек.

Задание 2. Семь спичек.

Я положил на стол 7 спичек и стал складывать из них разные фигурки (рис. 9.14). Каждый раз надо было сосчитать, «сколько теперь стало спичек». И каждый раз оказывалось, что их 7. Дина даже утверждала, что их всегда будет 7, но тоже охотно считала, когда подходила ее очередь. Под конец, памятуя о нашем первом занятии с мальчиками, я сложил спички в пространственную фигуру — «колодец». Очередь была Женина; как и в тот раз (см. стр. 28), сосчитать спички было трудно, так как колодец при неловком прикосновении разваливался. Может быть, поэтому их на этот раз оказалось 6. Я подвел итог: во всех фигурках получалось 7, а в колодце — 6. Никто не протестовал, даже Дина.

Задание 3. Угадывание закономерности.

Не помню, что была за задача.

Задание 4. Расположение кубиков в пространстве.

Девочкам было дано множество одинаковых черно-белых кубиков: каждый был разделен пополам плоскостью, проходящей через диагонали двух противоположных граней (рис. 9.8 на стр. 315).

Требовалось расположить кубики в пространстве всеми возможными способами (естественно, оси кубиков параллельны одним и тем же осям координат). Конечно, лучше всего было бы иметь какие-нибудь подставочки, в которые бы кубики вставлялись, но у меня их не было, и мы просто прикладывали кубики друг к другу. Девочки с задачей в общем справились, хотя под конец испытывали трудности. И у меня тоже были трудности: когда очередное решение не получалось, никто тем не менее не хотел уступать свою очередь.

Реакция Жени на задачу меня огорчила. На решение она тратила меньше энергии, чем на психологическую защиту: с самого начала она заявила, что будет думать долго, «потому что она еще маленькая и не может быстро...»; после этого она еще долго освещала и поясняла эту мысль, и никак не удавалось переключить ее с роли адвоката на роль математика. Потом она очень картинно морщила лоб, строила мне глазки, пытаясь вызвать улыбку, и всячески демонстрировала напряженную работу мысли; спрашивала, будто что-то запамятовав: «Как там, пап...?», — и всё это не глядя на кубики, а глядя либо на меня, либо вообще в сторону. Как с этим бороться, я не знаю. У меня такой подход вызывает сильное раздражение, но оно, естественно, никак делу не помогает. А начинаешь делать ей замечания — она тут же вступает в пререкания, и, попав в родную стихию, вообще забывает о задаче.

Занятие 11. Пятерки

26 мая 1984 (суббота) $11^{00} - 11^{50}$ (50 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Это занятие было последним в учебном году, поэтому оно по структуре отличалось от остальных.

«Геометрия для малышей»

Я читал девочкам первую главу из книги Житомирского и Шеврина «Геометрия для малышей».

Пятерки.

В книге речь шла о линиях (прямых, кривых и проч.). «А сейчас мы с вами тоже нарисуем линию», — сказал я. Каждая из девочек получила лист бумаги, на котором было нарисовано 10 точек, занумерованных числами $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Точки надо было соединить последовательно одну за другой по порядку. Саня и Дина справились легко и быстро, а у Жени были трудности: в основном ее сковывала робость, боязнь сделать что-нибудь не так. Ноль, разумеется, был обнаружен последним. Все очень смеялись.

Когда работа была закончена, оказалось, что на каждом листке нарисована цифра 5. Я торжественно объявил, что все трое получают пятерку за год по математике.

Пятерки-печенье.

Алла испекла печенье в виде пятерок — шесть штук, три больших и три маленьких. Мы вручили каждой из девочек по две пятерки. Не помню, чья была идея, но девочки сами решили маленькие пятерки съесть тут же, не отходя от кассы, а большие унести домой и угостить всех домашних. На этом всё и кончилось.

Глава 10.

Кружок с девочками — второй год

Занятие 12. Что-то не так с теорией вероятностей

25 октября 1984 (четверг) $10^{00} - 11^{10}$ (1 час 10 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Вытаскивание фигурок из мешка.

Я насыпал в мешок 9 больших фигурок из набора Дьенеша: три круга, три квадрата и три треугольника, и просил девочек по очереди вытаскивать вслепую заданную заранее фигурку (так, чтобы каждой достались фигурки всех трех разных типов). Форму надо было определять на ощупь.

Задание было легким, и девочки справились с ним вполне хорошо.

Задание 2. Логическое включение классов.

Я положил перед девочками четыре фигурки из набора (все большие, рис. 10.1) и стал задавать вопросы такого типа: каких фигурок больше — больших или квадратов? Или: квадратов или красных? Иногда вопросы перемежались с более простыми: сколько здесь квадратов? сколько больших фигурок? сколько красных?

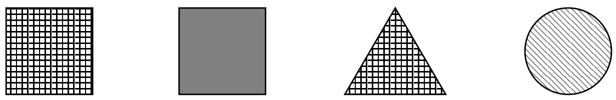


Рис. 10.1. Красный квадрат, синий квадрат, красный треугольник и зеленый круг.

На простые вопросы все отвечали правильно. Но, к моему удивлению, и на более сложные вопросы, касающиеся пересекающихся множеств, все, кроме Жени, отвечали правильно. Только Женя отвечала как положено по психологической науке: «Чего больше — квадратов или больших?» — «Ничего не больше... поровну». — «А сколько квадратов?» — «Два». — «А больших фигурок сколько?» — «Четыре». — «Значит, квадратов два, а больших фигурок четыре, но при этом их поровну?» — «Да».

Тут Саня вставила: «Смешно как-то Женя отвечает. Не понимаю!» Я стал задавать классические вопросы типа «кого больше: зверей или зайцев?». И на этот раз тоже все дали правильные ответы (даже Женя), а Дина с Саней даже всё правильно объяснили.

Я, тем не менее, всё равно не верю, что они до конца понимают включение классов, и еще как-нибудь их поймаю на какой-нибудь другой задаче.

Задание 3. Вероятностная игра.

Каждый из четырех игроков (я тоже участвовал) получил по три фишки и поставил их в клеточки первого ряда планшетки (рис. 10.2).

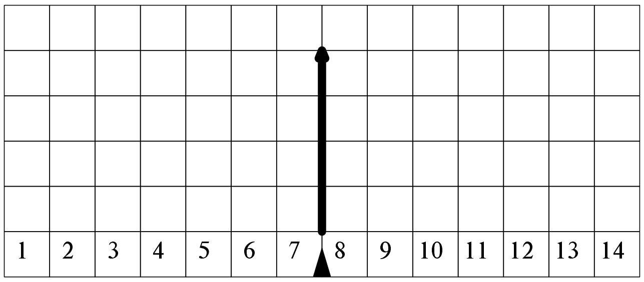


Рис. 10.2. Считается сумма очков, выпавшая на двух костях, и соответствующая фишка продвигается на одну клетку вперед. Мы в эту игру уже играли с мальчиками: суммы 1, 13, 14 вообще невозможны, наиболее вероятная сумма — 7.

Затем игра протекала следующим образом: мы по очереди бросали две кости, считали сумму очков, и если, скажем, получалось 9, то фишка, стоявшая в столбце, помеченном числом 9, делала один шаг но направлению к финишу. Для девочек цель игры состояла в том, чтобы «выиграть», т. е. поскорее дойти до финиша. (Я заранее договорился с ними, что в этой игре всё решают кости, а кости глупые, и поэтому никто не будет обижаться на свой проигрыш.) У меня же было сразу несколько «педагогических целей». Во-первых, чтобы они в процессе игры учились складывать небольшие числа. Во-вторых, чтобы они запоминали, как пишутся цифры (выяснилось, что Саня и Женя их плохо знают). В-третьих, чтобы развивать нечто вроде «вероятностной наблюдательности» (т. е. чтобы девочки учились замечать, что одни числа выпадают чаще, чем другие, и старались ставить свои фишки на более выгодные клетки).

К сожалению, последняя назидательная идея (вероятностная) совершенно не удалась. Начнем с того, что Женя, например, понятия не имела, что два значка «14», стоящие у правого края, означают число «четырнадцать». И уж тем более далеко ей было до осознания того факта, что такая сумма не может получиться на двух костях. Можно было, конечно, заметить, что такая сумма ни разу не выпадала. Но — такое вот патологическое невезение — сумма 7, которая по теории является наиболее вероятной, тоже очень долгое время ни разу не выпадала (да и потом выпадала как-то вяло, без желания наверстать упущенное).

Жене вообще как-то в этой игре не везло. У Дины уже все три фишки финишировали (и, чтобы ей не было скучно, я разрешил ей поставить их снова на старт, и они уже опять активно продвигались вперед), а Женя еще практически не двигалась с места (и это имея семерку!). Мне очень хотелось, чтобы хотя бы одна из Жениных фишек доползла до финиша. Из-за этого игра очень сильно затянулась, мы кончили только в 11^{10}, и Дина, кажется, опоздала на музыку.

Что касается сложения, то очень забавно было наблюдать, как десятки раз выпадает одна и та же комбинация костей, скажем, 5 и 4, и как девочки каждый раз аккуратно пересчитывают точки: один, два, три, ..., девять. Иногда я бесстрастным комментаторским тоном замечал: «Помнишь, у тебя уже один раз выпадало 5 и 4? Тогда, кажется, тоже получилось девять». Но никто моих намеков не понимал. Между прочим, это не означает, что они не смогли бы угадать ответ, если бы их об этом специально попросили. Просто «угадать» и «сосчитать» — это два совершенно разных дела. Когда считают, то тыкают пальцем в каждый предмет и говорят: раз, два, три... При этом можно заранее знать, сколько получится, но это не имеет отношения к делу; ведь сказано: «сосчитай».

Занятие 13. Опять о пересекающихся классах

15 ноября 1984 (четверг) $10^{10} - 11^{00}$ (50 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Вытаскивание фигурок из мешка.

Задание аналогичное тому, что было в прошлый раз. Только тогда я сам просил вытащить определенную фигурку, и фигурок в мешке было мало.

А на этот раз я высыпал в мешок весь набор Дьенеша, а девочки должны были вытаскивать произвольные фигурки, но при этом каждый раз перед вытаскиванием объявлять вслух: «большой треугольник с дыркой», или «маленький круг без дырки» и т. п. Они легко с этим справлялись, только практически всегда почему-то объявляли лишь форму и дырчатость, а размер объявлять забывали (и делали это только в ответ на мой вопрос). Видимо, размер ощущается в большей степени «визуальным» признаком, предназначенным для глаз (как цвет), а не для пальцев.

Для развлечения я заранее подсыпал в мешок несколько звездочек (не принадлежащих набору). То-то было смеху, когда Дина в первый раз такую звездочку вытащила! А Саня даже стала специально выискивать звездочки и вытаскивать только их.

Задание 2. Укладывание фигурок в коробку: пересекающиеся классы.

Это задание родилось почти на ходу, но я им очень горжусь. Девочки всегда спорят и дерутся, когда укладывают фигурки обратно в коробку. На этот раз мне пришло в голову не утихомиривать их и не стыдить, как обычно, а превратить эту процедуру в специальное задание. После этого конкретный вид задания возник сам собой.

Я объявил, что мы будем укладывать фигурки по очереди, по одной штуке. При этом Женя должна укладывать только маленькие фигурки, Саня только кружочки, а Дина — только фигурки с дыркой. (Маленькие фигурки составляют половину всех фигурок, дырявые тоже, а вот круги составляют только треть. Поэтому, когда они кончились, я разрешил Сане укладывать треугольники.) Поначалу всё шло благополучно: Женя укладывала маленькие фигурки, но не любые, а без дырок и не круги, чтобы «не залезать на чужую территорию»; Саня укладывала только большие круги без дырок, Дина параллельно ей укладывала большие круги с дыркой. После четырех раундов возникла первая трудность: Саня сказала, что ей больше нечего укладывать. «А что, разве круги кончились?» — спросил я. — «Кончились». — «Давай поищем». Саня шурует пальцем в целой куче кругов, «ищет круг». «Ну что, нету?» — «Нету». — «А это разве не круг?» (Я показываю на маленький кружок с дыркой.) Саня (после паузы): «Это Женин. . . » — «Но ведь это круг?» — «Да». — «Тебе, Саня, разрешается укладывать любые круги, хоть большие, хоть маленькие!» — «А как же я? Маленькие я укладываю!» — вдруг возмущается Женя. «Ну и что?» — говорю я. — «Ведь это же круг!» — «Он с дыркой!» — неожиданно вмешивается Дина. Но Саня уже осознала, что *я разрешаю* ей сейчас положить этот кружок, и поэтому точками зрения остальных участниц можно пренебречь. Работа продолжается, а вместе с ней споры, обсуждения и т. п. Первая Женя поняла (и даже сказала вслух), что она имеет право на любые маленькие фигурки, независимо от формы, цвета и наличия дырки. Вот только она не хочет признать аналогичное право за другими: как только кто-нибудь зарится на маленькую фигурку, заявляет протест. Постепенно она смирилась, но не в связи с необоснованностью протеста, а лишь в связи с бесполезностью. Вскоре и Саня с Диной осознали свои права, но споры вспыхивали до самого конца, хотя всё реже.

Наконец работа закончена: из всех фигурок остались снаружи лишь четыре больших квадрата без дырки. Я попросил девочек объяснить, почему они остались снаружи. Конечно, отчетливого ответа я не получил, но кое-что они всё же сумели сказать, а потом я (после слов «Правильно, молодцы!») как будто бы повторил вслед за ними, а на самом деле сказал всё четко и правильно. После этого я разрешил каждой из девочек положить по одному квадратику, а последний положила маленькая Асенька[1], которая тоже сидела с нами.

Задание 3. План комнаты.

На листе бумаги я изобразил большой и очень грубый план комнаты (нарисовал его тут же на занятии на глазах у девочек). Далее по очереди наносил на него диван, пианино, секретер и проч. и спрашивал у девочек, что это такое. Потом спросил, где нужно нарисовать стол. Потом попросил обозначить буквами, где кто из нас сидит за столом. Потом предложил девочкам самим нарисовать книжные полки, проигрыватель (они, конечно, рисовали не план, т. е. не вид сверху: Женя сделала рисунок, а Саня, как древний египтянин, изобразила вид одновременно сверху и спереди). Потом я изобразил головку Буратино (рис. 10.3: у него очень легко показать, где перед) и спрашивал, что у него сзади, спереди, справа, слева (на вопрос, что у Буратино сзади, Дина ответила: «Помпончик»). На все вопросы девочки отвечали вполне прилично.

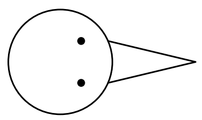


Рис. 10.3. Буратино с длинным носом. Его можно вырезать отдельно и, помещая в разные места плана (комнаты, двора или чего угодно), спрашивать, что у него спереди, сзади, справа и слева.

[1]Младшая сестренка Дины.

Геометрия для малышей.

Решил читать девочкам всю подряд «Геометрию для малышей». Хотя весной мы первую главу читали, я решил ее повторить, чтобы всё шло с самого начала. Как и в прошлый раз (т. е. 26 мая), все рисовали на своих листках точки, прямые, кривые и т. п., но только на этот раз у Жени тоже всё хорошо получалось. Прочитали первую главу.

* * *

За обедом Женя рассуждает: «Всё время кажется, что пройдет один год, и Дима догонит Петю. Но вот проходит год, и Петя тоже вырастает и всегда остается больше Димы. Но, Дима, ты не расстраивайся! Зато Пете совсем мало осталось жить, а тебе гораздо больше!»

Сразу два закона сохранения.

Занятие 14. Ханойская башня

22 ноября 1984 (четверг) $10^{10} - 10^{50}$ (40 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Ханойская башня.

Я показал девочкам венгерскую пластмассовую «ханойскую башню», долго и подробно объяснял правила игры. Потом раздал всем трем самодельные картонные ханойские башни и предложил им сыграть самим. Женя сразу же отказалась играть — «потому что у меня не получится». Я ее, однако, уговорил, и она кончила первой. Сначала она, тем не менее, была в тупике, и я несколько раз ей подсказал. Потом дело пошло на лад. Через некоторое время я обнаружил, что занимаюсь только с Женей, а Саня уже далеко ушла вперед, и я не уверен, что она не нарушала правил. Я стал за ней следить. Правила она, в самом деле, иногда нарушала — в основном таким образом, что играла сразу двумя руками, переставляя две фишки. После моего вмешательства она некоторое время была в тупике, и ей, как и Жене, пришлось подсказывать. Потом и она справилась с работой. Последней осталась Дина. Думаю, что она-то как раз правил не нарушала, потому и отстала. Впрочем, это только гипотеза. Я ею почти не занимался; ее пыталась подталкивать Галя, но в основном не подсказками, а понуканиями (Дина много отвлекалась и смотрела, как играют другие). Женя с Саней, конечно, не преминули заметить, что Дина — последняя, а Женя еще подчеркнула, что она-то первая. Я еще перед началом игры говорил, что у нас не соревнование, а просто игра, и сейчас это как можно более отчетливо повторил. Потом стал подсказывать Дине.

Дина работала еще довольно долго, а Женя с Саней меж тем томились от скуки и начали баловаться. Еще когда Женя одна кончила, я предлагал ей поиграть второй раз, но она отказалась. Даже пластмассовая игра ее не прельстила: она сказала, что ей неинтересно.

Задание 2. Укладывание фигурок.

Снова укладывали фигурки Дьенеша в коробку (только правила — что кому укладывать — я, разумеется, поменял). На этот раз девочки продемонстрировали большее понимание, и склок было меньше.

Задание 3. Геометрия для малышей.

Читали книгу дальше. Во время чтения возник конфликт: девочки всё требовали, чтобы мы, как в прошлый раз, рисовали линии, а в книге на этот раз таких заданий не было. Мне никак не удавалось прекратить поток их занудства: только сумею договориться с одной, как вступает вторая; начну читать — опять кто-нибудь перебивает и клянчит фломастеры. В конце концов я даже разозлился и вообще прекратил чтение, сказав девочкам, что они плохо себя ведут. На том и расстались.

Занятие 15. Башни равной высоты

6 декабря 1984 (четверг) $10^{00} - 11^{00}$ (1 час)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Снова ханойская башня.

На этот раз подсказок было существенно меньше. Первой справилась Саня, второй Женя, третьей Дина. Саня попросила подарить ей одну из картонных башен, что ей и было обещано (хотя я сильно сомневаюсь, что она будет одна играть ею дома).

Задание 2. Башни равной высоты.

Когда-то я уже давал девочкам такую задачу: на возвышенном месте строится небольшая башенка из кубиков; нужно построить башню той же высоты на более низкой площадке (рис. 10.4). Замысел был в том, что дети скорее всего построят башню вовсе не той же высоты, а с верхушкой на том же уровне по горизонтали. А после этого мы возьмем да и столкнем их с какими-либо противоречиями.

Так оно, в общем-то, всё и получалось, но только задачу эту я тогда дал девочкам на улице, и все башни у них рассыпа́лись от ветра. На этот раз я решил построить исходную башенку на более низкой площадке (конкретно, на табуретке), а девочки должны были строить башню той же высоты на

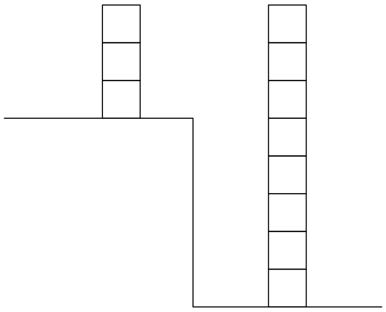


Рис. 10.4. С этой задачей мы уже встречались (см. рис. 9.12 на стр. 319).

столе (рис. 10.5). Таким образом, добиться того, чтобы верхушки были на одинаковом уровне, попросту невозможно.

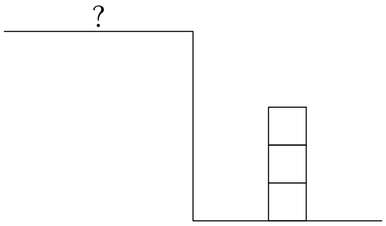


Рис. 10.5. Нужно построить на столе башню такой же высоты, что и башня, стоящая на табуретке. Добиться совпадения верхних уровней башен на этот раз невозможно.

Ничего путного, однако, из этой задачи не получилось. Сначала всё шло неплохо. Девочки действовали довольно грамотно: строили вторую башню на табуретке, а потом аккуратно переносили ее на стол. Я спрашивал: «Башенки одинаковые?» — «Одинаковые». — «А какая выше?» — «Вот эта». — «Как же так? Я просил построить башню той же высоты, а она оказалась выше». — «Так ведь она же на столе». Тут Дина стала строить на столе башню из тех же деталей (деревянных) и в той же последовательности, что и на табуретке. Она, однако, ошибалась и несколько раз вставляла не те детали. Тут у меня возникла несколько громоздкая идея — проверить транзитивность: построить две башни, равные первой, и чтобы они оказались не равными между собой. Для этого по крайней мере одну башню надо было делать из другого материала, т. е. из других по размеру кубиков.

[Я, ей-богу, похож на чукчу из анекдота: не читатель, а писатель. Хотя бы свой собственный дневник иногда перечитывал!]

Параллельно, видимо, у меня присутствовала и какая-то другая идея, более смутная, так как я предложил девочкам строить обе башенки на пианино. Может быть, я имел в виду, что пианино чуть-чуть выше стола, и девочки на этот раз будут уравнивать верхушки. В итоге я не сформулировал четко задачу — это во-первых; во-вторых, поверхность пианино (т. е. крышки над клавиатурой) оказалась не вполне горизонтальной; и, наконец, кубики, которые я выбрал, оказались совершенно не подходящими для построения башенки: даже мне не удавалось добиться того, чтобы они не рассыпáлись. При этом кубики разваливались на треугольные половинки, девочки хохотали, кидались их собирать, лезли под диван искать, не закатилось ли туда что-нибудь, после чего всё начиналось сначала. Пришлось мне просто задачу свернуть и кончить на полдороге.

Спирограф.

Я показал девочкам спирограф. Довольно долго на их глазах рисовал разные спирали и завитушки. Галя одновременно делала то же самое с другими колечками. К сожалению, у спирографа есть один существенный недостаток: дети не могут с ним справиться самостоятельно. Даже когда девочки попытались что-то нарисовать с моей помощью, у них тоже ничего не вышло — либо большое колесико уползало, либо маленькое соскакивало. После нашего занятия со спирографом попытался поработать Дима, но тоже без особого успеха.

Геометрия для малышей. Продолжали чтение книги.

Занятие 16. Поворот на 90°

20 декабря 1984 (четверг) $10^{10} - 10^{50}$ (40 мин.)
(Женя, Саня)

К этому занятию я подготовился более-менее сносно, всё продумал заранее и заготовил много задач. Однако за 10 минут до его начала позвонила Галя и сказала, что Дина заболела и сегодня не придет. Пришлось мне всю программу на ходу ломать и придумывать заново. Конечно, Дина, как самая математически продвинутая, особенно сильно бы не отстала, но, чтобы это осознать, надо было соображать быстрее, чем я умею. Я, в частности, не планировал больше заниматься ханойской башней, но вставил ее снова за неимением других идей.

Задание 1. Ханойская башня.

Саня опять справилась первой и даже успела сыграть два раза. Это еще сильнее укрепило ее в мысли взять эту игру себе в подарок (что она хотела сделать в прошлый раз, но забыла). На этот раз Катя ее в самом деле унесла.

Задание 2. Поворот на 90° на мозаике.

Я строил на мозаике разные фигурки, а от девочек требовалось построить такую же фигурку, повернутую на 90° (или, иначе, «положить фигурку на бок»). Сначала я сам показал на примере, как это делается. Женя поначалу ничего не понимала; затем немного освоилась и стала решать задачи почти самостоятельно. Под конец я совсем обнаглел и дал ей довольно трудную задачу: в соответствующей фигурке между некоторыми линиями встречались углы в 45° и в 135°. К сожалению, эту задачу она не осилила.

Саня справлялась со своими задачами более-менее ровно, без особых провалов и спадов. Я, однако, ей особенно трудных задач не давал. Интересно, что и я, и Женя делали всегда поворот на 90° по часовой стрелке, а Саня все свои повороты делала против часовой стрелки. Не связано ли это с тем, что она левша?

Геометрия для малышей. Прочитали еще несколько страниц.

Занятие 17. Снежинки

27 декабря 1984 (четверг) $10^{00} - 11^{10}$ (1 час 10 мин.)
(Женя, Дина)

На этот раз отсутствовала Саня, но я решил не менять характер занятия, так как оно должно было быть новогодним, а Новый год уже на носу.

Снежинки.

Почти всё занятие было в той или иной степени посвящено снежинкам. Сначала мы рассматривали большую пластмассовую снежинку, разбирали, какие у нее есть оси симметрии (ставили по оси зеркальце). Потом я показывал девочкам картинки снежинок в книге Г. Вейля «Симметрия» (а также показал книгу И. Кеплера «О шестиугольных снежинках» — картинок в ней, к сожалению, нет, так что я показал только обложку с заглавием). Затем на квадратной мозаике я поставил в самом центре синюю точку («центр») и стал объяснять девочкам центральную симметрию. Шла она очень туго, но в итоге мы соорудили какое-то подобие снежинки (не 6-угольной, разумеется). Потом стали строить уже настоящую 6-угольную снежинку на круглой мозаике. Она получилась гораздо лучше, так что мы ее даже оставили до вечера, чтобы показать Алле.

После этого мы стали вырезать снежинки из листа бумаги.

Я хорошо помню, как я сам в детстве просто таял от немого восторга перед этим завораживающим чудом. Берешь простой лист бумаги, складываешь несколько раз, вырезаешь совершенно произвольную загогулину — чем позагогулистей, тем лучше — потом, уже заранее предвкушая результат, осторожно разворачиваешь лист — и перед тобой оказывается нечто такое невообразимо симметричное, узорчатое, кружевное... Потом мы прилепляли эти бумажные снежинки к окнам, и они висели весь Новый год и еще долго после этого.

Реакция Дины очень напоминала мою тогдашнюю, из воспоминаний. Что же касается Жени, то она, казалось, на сами снежинки вообще не обращала никакого внимания. Зато ее безумно увлекали обрезки: «Ой, смотри, папа, ноги с коленями! Ой, а это голова и две руки. А вот кулак! А это человек танцует — вот здесь у него нога, а рукой он взялся за голову...»

Я показывал все детали вырезания подробно: складывл лист сначала пополам, потом вчетверо и т. д. — и показывал каждый раз, как результат вырезания удваивается, учетверяется, ... Дима тоже принимал участие в этой работе.

Геометрия для малышей.

По просьбе Дины читали то же, что в прошлый раз, когда ее не было.

Занятие 18. Грани, вершины и ребра куба

11 апреля 1985 (четверг) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Женя, Саня, Дина)

Как это видно из даты, со дня предыдущего занятия прошло три с половиной месяца. Такой большой перерыв связан с тем, что за это время было очень много болезней: Дина с Саней болели коклюшем, я и Женя гриппом, а потом я еще лечил свое горло. А в те редкие просветы, когда можно было позаниматься, я оказывался как спортсмен, который потерял форму. За это время мы с Женей ничем не занимались, за исключением одного случая, который произошел совершенно спонтанно. Дима решал разные задачи из «Математической смекалки» Б. А. Кордемского, в том числе такую:

> Два мальчика катаются на лодке. К ним подходят два рыбака и просят перевезти их на другой берег. Однако лодка вмещает только либо двух мальчиков, либо одного взрослого. Как рыбакам перебраться через реку при условии, что лодка после этого должна остаться у мальчиков?

(В другой версии этой задачи нужно перевезти через реку не двух рыбаков, а целую роту солдат.)

Как ни странно, Дима решил задачу неправильно, хотя уже знал задачу про волка, козу и капусту (она обсуждается далее, на стр. 339 и следующих): у него один из рыбаков перебирался через реку вплавь. Однако его всё-таки грызло сомнение, и за обедом он спросил у меня, годится ли такое решение. Между нами завязался длинный разговор о том, что значит *оставаться в рамках задачи* (в процессе которого он, конечно же, задачу решил). Женя, услышав наш разговор, включилась в него и попросила дать ей тоже двух мальчиков и двух рыбаков. Мы дали ей две целых спички, две половинки и еще какую-то фиговину в качестве лодки, и она принялась решать задачу. Задача о рыбаках кажется мне более трудной, чем задача о волке, козе и капусте, так как в ней нетривиальный ход (отплытие двух мальчиков на другой берег и возвращение одного из них) нужно использовать два раза. Поначалу Женя догадалась до него только один раз, затем стала в тупик. Дима ей подсказал (я не успел его остановить), и задача была завершена. Характерно, однако, что подсказанное ей место она потом не смогла вспомнить: она захотела показать свое решение Алле, но опять застряла на полдороге. Тут уж я Диму удержал, Женя еще немного подумала и догадалась до решения сама.

Должен признаться, что она меня этим сильно удивила. Я уже привык к тому, что она в математике отстает от Диминых показателей того же возраста, а тут она его явно опередила: Дима в пять лет не смог решить задачу про волка, козу и капусту (это было летом на даче, мы рисовали реку на земле, возили туда-сюда разные предметы, но ничего не помогало).

Всё описанное здесь произошло примерно месяц назад. Сегодня я тоже хотел дать девочкам задачу про волка, козу и капусту, но не успел.

Задание 1. Грани, вершины, ребра кубика.

Я дал каждой девочке по кубику и попросил сосчитать сначала грани, потом вершины, а потом ребра. Все справились с задачей, только при подсчете ребер Женя насчитала их 8 штук: она подсчитала верхние и боковые ребра и уж совсем было собралась приняться за нижние, но тут Саня закричала во весь голос: «Двенадцать!» Я оглянулся в ее сторону, увидел, что Дина не считает, а смотрит на Женю, стал ей говорить, чтобы она считала сама, а она ответила, что уже сосчитала — и, одним словом, Женя отвлеклась и забыла довести задачу до конца.

А когда считали вершины, Женя сказала: «Восемь. Ну, ведь четыре и четыре это восемь, так что можно было и не считать». Она очень заметно прогрессирует.

Задание 2. C_5^2 — двухцветные бусы.

Я дал каждой из девочек листок бумаги, на котором были по 12 раз нарисованы одинаковые бусы, состоящие из пяти кружочков (рис. 10.6).

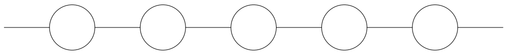


Рис. 10.6. «Бумажная версия» задачи, подробно обсуждавшейся в главе 3.

Требовалось две бусинки закрасить в синий цвет, а остальные три оставить белыми — и сделать это по возможности разными способами, без повторений. К моему большому удивлению, лучше всех с задачей справлялась Женя. У нее вообще произошел какой-то скачок вперед.

Саня сегодня была то ли не форме, то ли чем-то возбуждена. Она работала очень поспешно и суматошно, повторяя одни и те же решения иногда по 6 раз. Когда это потом выяснилось (мы все вместе искали у всех повторения), она сказала, что не знала, что так нельзя. Я дал ей еще один листок, но она сделала на нём лишь одно новое решение (списанное у Жени), а всё остальное снова заполнила повторениями, причем всё это быстро, без размышлений и без оглядки на прежние решения. В сумме по двум листкам у нее набралось 6 решений. Дина по сравнению с Саней работала вдумчиво, но очень робко. С большим трудом найдя три решения, она сделала робкую попытку капитулировать, но я ее не принял, сказав, что, мол, Женя еще работает, и ты работай. Тут Дина посмотрела на Женю, увидела ее очередное решение, сказала: «А-а!», — и нарисовала четвертые бусы. (А Женька, зараза, закричала: «Динка, ну ты! Не подглядывай!» — и закрылась локтем). После четвертого решения Дина опять попыталась сдаться, но потом нашла (уже сама) еще какие-то варианты. В итоге у нее, как и у Сани, оказалась 6 решений, но повторение было всего одно. По результатам Женя не так уж сильно опередила остальных: у нее было 7 решений (при одном повторении). Отличался скорее характер работы. Она работала так же внимательно, как Дина, и при этом так же смело, как Саня. Иными словами, если бы не было моих подсказок и понуканий и девочки работали бы отдельно, у Дины было бы 3 решения без повторов, у Сани — 5 решений и 7 повторов, а у Жени — 7 решений и 1 повтор. При этом Женя не собиралась останавливаться, а продолжала искать дальше. Мне пришлось ее остановить, так как две остальные девочки ничего не делали и начали баловаться. После подведения итогов Женя сказала: «Ой, так у меня больше всех!», но Дина ее осадила: «А ты, Женя, не хвастайся!» Женя промолчала в ответ (тоже не совсем в ее стиле).

Под конец, как я уже говорил, мы все вместе проверили все решения и нашли все повторы. С этим все справлялись одинаково успешно, что еще раз показывает, что, если говорить отдельно об интеллекте, то у каждой из девочек его вполне хватало для решения задачи. Если чего-то не хватало, так это сосредоточенности, смелости и креативности, т. е. фантазии при поиске новых вариантов.

Задание 3. C_5^2 на мозаике (повторение).

Эта задача уже была у нас чуть больше года тому назад, на 4-м занятии.

Сначала я спросил у девочек, не помнят ли они, как мы уже когда-то решали задачу, очень похожую на ту, что только что была. Саня сказала, что помнит, как мы рисовали «вот такие» крестики (показала пальцем). Не знаю, что она имела в виду, но похожей ей задача показалась, видимо, потому, что мы тоже рисовали. Дина с Женей ничего похожего вспомнить не могли. Тогда я сам достал мозаику и дал задачу на построение «бус» из 5 фишек — 2 синих и 3 белых. Тут все вспомнили, что такая задача, действительно, была.

Мы стали по очереди строить такие бусы. Саня была явно где-то не здесь: она никак не могла найти второе (!) решение (после того, как Дина построила первое). Начала Саня с того, что поставила 3 белые фишки на те же места, что у Дины (рис. 10.7), и надолго задумалась.

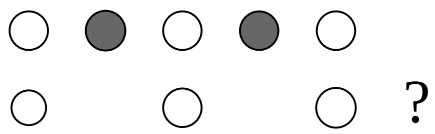


Рис. 10.7. Такое продолжение ничего хорошего не предвещает — нового решения из него не получится.

Думать, собственно говоря, было не о чем, так как для синих фишек никакого выбора не оставалось, и неизбежно повторялось решение Дины. Я предложил Сане переставить белые фишки иначе. Она сняла их все три, немного подумала и поставила опять на те же места. Я пустился в более долгое объяснение, но Саня была как в гипнозе: она снова сняла три фишки и опять поставила их на те же места. Пришлось мне, рискуя обидой, передать очередь Жене. Женя мгновенно справилась с задачей, и тут Саня, увидев ее решение, как будто очнулась и сказала: «А-а, теперь я тоже могу!» И действительно, вскорости она без труда нашла третье решение, потом пятое и только на восьмом снова споткнулась, и пришлось опять прибегнуть к помощи Жени. Построив на мозаике каждое очередное решение, мы отыскивали его на листках у девочек (т. е. каждая отыскивала сама, а я следил). Если какое-то решение уже было, около него ставился плюсик, а если не было, мы его дорисовывали.

Поиск последнего, десятого решения, достался Дине. Она долго не могла с ним справиться. Тогда я применил подсказку: спросил, нет ли у кого на листике решения, еще не отмеченного плюсиком. Такое решение нашлось у Жени, и она построила последний ряд бус на мозаике. Я обратил внимание девочек на то, что теперь и на мозаике, и на каждом листке — ровно по 10 решений. После этого я сам принялся отыскивать 11-е решение. Я подробно и обстоятельно, а главное — *очень систематично*, перебирал все возможности, и каждый раз мы убеждались, что произошло повторение. В итоге мы сделали коллективный вывод, что больше решений нет. На этом занятие закончилось.

Между прочим, один раз Женя тоже применила, хоть и не в полном объеме, систематический перебор: она поставила одну синюю фишку в первую позицию, а потом стала перебирать поочередно возможные положения второй фишки, и так нашла новое решение. В общем, она меня сегодня порадовала.

* * *

Занятия математикой очень смешно повлияли на Женино обычное времяпрепровождение — рассказывание самой себе сказок вслух. Она занялась этим сразу же после кружка, но персонажами на этот раз у нее были цифры, предводителем коих была пятерка. Голос взволнованный — восклицательные знаки можно ставить едва ли не после каждого слова, а иногда и по два-три: «Они схватили пятерку и потащили ее в тюрьму! Четверка бросилась спасать свою подругу, за ней — тройки, двойки, но было уже поздно. (Трагическая пауза.) Ее увели — навсегда!! “Как же мы будем без предводителя?” — сказал. . . » — не помню уже кто это сказал.

Занятие 19. Волк, коза и капуста

18 апреля 1985 (четверг) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Женя, Саня, Дина)

Задание 1. Волк, коза и капуста.
Приведу на этот раз дословную формулировку из книги Кордемского:

> Это — тоже старинная задача; встречается в сочинениях VIII века. Она имеет сказочное содержание.

> Некий человек должен был перевезти в лодке через реку волка, козу и капусту. В лодке мог поместиться только один человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту, а в присутствии человека «никто никого не ел». Человек всё-таки перевез свой груз через реку. Как он это сделал?

С детства я помню картинку, которая сопровождала эту задачу в книге: бородатый мужик в лаптях стоит около лодки и чешет затылок. Рядом с ним — все три его «предмета»; волк, ощерившись, смотрит на козу.

Сегодня, наконец, дал эту задачу девочкам. И Женя с ней не справилась! Я ничего не понимаю: неужели эта задача труднее задачи о двух мальчиках и двух рыбаках? Тогда чем труднее? И почему на кружке в первом классе (в Диминой школе) ее никто не решил, даже гениальный Глеб?

Волк, коза и капуста, а также рыбак и лодка, у нас были «настоящие», т. е. не какие-нибудь условные заменители, а маленький игрушечный волк, маленькая игрушечная коза и т. п. Рекой служила щель, разделяющая пополам плоскость складного стола.

Дина долго и внимательно смотрела на фигурки, а потом сказала: «Я, кажется, могу. . . » — и показала правильное решение. После этого повторилась та же очень характерная история, что и в прошлый раз: ни Женя, ни Саня не смогли воспроизвести только что увиденное решение. Первой пробовала Саня. В решающий момент (когда козу надо везти назад) она надолго задумалась и не знала, что делать; Дина ей подсказала. Но после этого Женя опять заткнулась в том же самом месте. На этот раз я попросил Дину не подсказывать, и задача осталась нерешенной. Тогда я снова привлек Дину, и она еще раз показала свое решение, а Жене предложил внимательно следить. Женя «всё поняла» (как она сказала), кинулась повторять и снова застряла, и опять справилась с задачей лишь после подсказки Дины. Видимо, в задачах, где главное — логическая организация материала, запомнить решение чисто механически, без осознания этой организации, невозможно.

Вспоминается один из опытов Пиаже позднего периода, касающийся памяти. Маленькому ребенку, который еще не понимает, что такое упорядоченное множество (факт непонимания сначала проверяют специальными тестами), показывают картинку, на которой изображены упорядоченные по длине отрезки прямых (рис. 10.8 слева), и просят запомнить, что здесь нарисовано. «Палочки», — говорит он. «Нарисуй, какие палочки». В ответ на эту просьбу ребенок рисует беспорядочный набор параллельных отрезков — так, как показано на том же рисунке справа. Так он их запомнил.

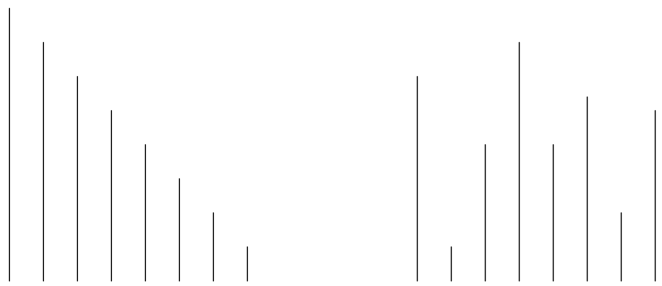


Рис. 10.8. Слева: упорядоченный набор отрезков; справа: как «запомнил» и воспроизводит их ребенок, еще не усвоивший понятия порядка. Уже через полгода тот же ребенок, вспоминая прежнее задание, воспроизводит левый рисунок.

Проходит полгода, и у ребенка спрашивают, помнит ли он то старое занятие. Оказывается, что да, помнит. Его просят нарисовать то, что было тогда — и он рисует совершенно правильную (левую) картинку, на которой отрезки упорядочены по длине — и даже оказывается в состоянии объяснить, что они упорядочены, чего раньше был сделать не в состоянии. После этого опыта устройство нашей памяти представляется совсем уж загадочным.

В соответствии с этим опытом можно было бы через какое-то время, скажем, через полгода, спросить у Жени, помнит ли она решение задачи про волка, козу и капусту. К сожалению, в нашей ситуации невозможно будет отличить, вспомнила ли она старое решение или решила задачу заново.

◁ У меня с этой задачей всегда была одна и та же проблема — я забывала решение и с некоторым ужасом смотрела на рисунок, уверенная, что вот сейчас я не придумаю и опозорюсь (про то, что раньше у меня получалось, я помнила, но уверенности это мне никакой не придавало).

Про задачу с лодкой и рыбаками я вовсе не забыла, и теперь, *a posteriori*, мне кажется, из сравнения поняла: всё дело в цели персонажей — да, да!

Рыбаки хотят попасть на другой берег, они это и делают, а мальчики им помогают. Мальчики никуда не стремятся, они просто «катаются» и хотят в конце сохранить лодку. Куда им ехать — туда или обратно — никакого значения для них не имеет. Никакое из действий участников не противоречит их целям.

А вот в волке, козе и капусте есть один совершенно *психологически* абсурдный ход: мужик везет *специально* привезенную им козу *обратно*. Подозреваю, что именно в этом месте у меня всегда был «затор». — Женя. ▷

Задание 2. Треугольная призма.

По аналогии с прошлой задачей про кубик я дал девочкам треугольную призму, у которой надо было сосчитать количество вершин, ребер и граней. Саня и Дина с задачей справились, а Женя — с шероховатостями.

Задание 3. Многоугольники.

На листе бумаги мы рисовали разные многоугольники и подсчитывали у них количество вершин и сторон. Подробности того, как протекала эта задача, я уже забыл, но, кажется, совпадение получалось не всегда. Помню только, что царил какой-то сумбур.

Задание 4. Еще раз C_5^2.

Семья Дины, в отличие от всех моих прошлых и нынешних учеников, имеет профессиональное отношение к математике, а потому и собственное мнение о стиле моих занятий. Часто мне кажется, что их раздражает и кажется им дурацкой моя манера не давать никаких объяснений (т. е. не объяснять, как *решается* задача). Подобно многим математикам, они считают главным педагогическим достижением умение четко и понятно («доступно») объяснить решение задачи. В этом направлении происходит главное педагогическое творчество: в поиске наглядных образов, логических ходов, аллегорий и т. п. Например, как объяснить новичку отличие интеграла Лебега от интеграла Римана? Нужно взять горсть монет и показать два метода суммирования: все подряд (по Риману) или отдельно монеты каждого достоинства (по Лебегу). Я подозреваю, что в моем игнорировании объяснений они видят не столько позицию, сколько неумение. Несколько раз они делились со мной разными соображениями о том, как можно было бы ту или иную вещь объяснить девочкам, как они что-то объяснили Дине и она, конечно же, всё поняла. Впрочем, когда Алла стала однажды говорить Гале о том, что я считаю, что ничего детям втолковывать не следует, то Галя отреагировала на это таким образом, что, мол, конечно, разумеется, кто же этого не понимает. Так что, может быть, мне всё это только кажется. Прав я или нет, не знаю, но на это занятие Дина принесла и с гордостью продемонстрировала мне тетрадь, почти до половины изрисованную «бусами» и вычислениями. Там была, во-первых, вся серия сочетаний из пяти элементов: C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5 с демонстрацией связи между C_n^k и C_n^{n-k}. Кроме этого, были разобраны и другие примеры, например, C_7^2. Дина рассказала, что теперь ей бабушка всё объяснила: и то, что нужно по очереди закрашенную бусинку фиксировать, а менять остальные (следующие), и то, как можно заранее сосчитать результат. Одним словом, отчетливый, связный и педагогически продуманный урок, который был бы очень уместен в четвертом классе (так мне *кажется* — сам я в четвертом классе никогда не преподавал).

Должен сказать, что Дина излагала всю бабушкину науку правильно и довольно толково. Я думаю, что было бы довольно легко поставить ее в тупик какими-нибудь вопросами (вряд ли она сумела бы объяснить, почему нужно закрашивать бусы именно в таком порядке, а не в другом; скорее всего, она бы ответила, что «бабушка сказала, что нужно делать так!»). Но я, разумеется, не стал этого делать. Ведь у меня так или иначе по плану была задача: выписывать неповторяющиеся сочетания из двух букв С и трех букв Б:

ССБББ
СБСББ
СББСБ
....

В том, какой будет результат, я не сомневался. Когда дело дошло до этой задачи, Дина справлялась с ней не хуже и не лучше других: с большим трудом и совершенно беспорядочно она нашла 6 решений. (Боюсь, что бабушка, увидев это, очень бы расстроилась и решила бы, что Дина совсем ничего не соображает. И снова была бы неправа. Впрочем, пожалуй, реальное развитие событий было бы иным: наверное, Дине не дали бы и двух минут на размышление, а стали бы загонять в угол наводящими вопросами и не отстали бы до тех пор, пока она не сделала бы всё «по науке». И это был бы очередной «педагогический успех», а всё недовольство и раздражение «тупостью» ребенка осталось бы загнанным внутрь.)

Дальше мы повторили ту же процедуру, что в прошлый раз: смотрели решения друг друга, искали повторения, дополняли друг друга и т. д., и в итоге составили общий список из 10 решений. После этого я сказал: «А знаете, что значат эти буквы: С, С, Б, Б, Б? Это Синий, Синий, Белый, Белый, Белый!» — и стал показывать бусы с прошлого занятия и объяснять, что две буквы С означают две синие бусинки, а три буквы Б — оставшиеся белые бусинки. Мы некоторое время занимались поисками соответствующих друг другу решений обеих задач. Девочки делали это охотно, активно и легко, но не было того ликования и энтузиазма открытия, который имел место на том памятном занятии с мальчиками. Вообще я заметил, что по сравнению с мальчиками девочки выражают гораздо больше восторгов по поводу самого факта наших занятий (при сообщении «завтра будет кружок» кричат «ура», прыгают, хлопают в ладоши...), но на самих занятиях, когда происходят наши маленькие открытия, они ликуют гораздо меньше — собственно, даже вообще почти никаких эмоций не проявляют.

«Малышам о звездах и планетах».

«Геометрия для малышей» отдана на прочтение Саше Пачикову, поэтому на этот раз, чтобы восстановить традицию чтения, читали книжку по астрономии.

Занятие 20. Цепочка с одной разницей

21 октября 1985 (понедельник) 14^{30} – 15^{20} (50 мин.)
(Женя, Саня, Дина)

Опять начинаю с самооправданий. Занятия возобновились после полугодового перерыва — никак не мог собраться с духом и снова вставить это дело в лавину всех остальных своих дел. В промежутке (в августе) вышла моя статья в журнале «Знание—сила», произошел взрыв интереса к кружку, мне стало очень стыдно за то, что я его забросил, но заодно возросло и количество препятствий — надо было кому-то что-то писать, с кем-то разговаривать, встречаться и т. п. К тому же жуткий кувырк с расписанием, свадьба Ани[2]... Вот так дело и дотянулось до конца октября.

У девочек, как и раньше, при известии о том, что будет кружок — вопли восторга.

Задание 1. Зарядка: отыскание цифр.

Каждая из девочек получила листок бумаги, разграфленный на разные геометрические фигуры, в которых стоят цифры (листочки у всех разные): пример приведен на рис. 10.9. Нужно показать и прочитать цифры по порядку. Все справляются быстро и хорошо. Женя и Саня начали с 1, дошли до 9, и им пришлось закончить нулем. Дина заметила этот дефект в их ответах и сама начала с нуля. Когда-то раньше аналогичная ситуация очень всех насмешила, но сегодня всё прошло спокойно.

Саня: «А вы это сами рисовали?» — «Да». — «А как так ровно?» — «С помощью линейки». — «А круги?» — «Циркулем». — «А-а-а...»

Задание 2. Цепочка фигурок с одной разницей.

Мы взяли снова наш бесценный набор Дьенеша и еще раз обсудили, чем фигурки отличаются друг от друга. Когда-то раньше такой разговор не очень удался, но сейчас все понимали, о чём идет речь, и перечисляли четыре признака: цвет, форма, размер, «дырка». Задание состояло в том, чтобы выкладывать фигурки друг за другом таким образом, чтобы каждая следующая отличалась от предыдущей ровно одним признаком (либо только

[2]Моя племянница.

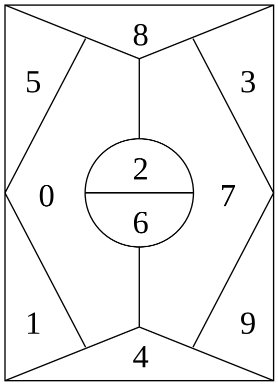


Рис. 10.9. Найти и показать все цифры в правильном порядке.

цветом, либо только формой, либо только размером, либо только наличием или отсутствием дырки), а все остальные признаки должны совпадать. Занимались мы этой задачей очень долго, практически всё занятие. Несколько раз я спрашивал у девочек, не надоело ли им, но они дружно заявляли, что нет, не надоело.

Дина и Женя справлялись с задачей без затруднений. Что же касается Сани... Ну что сказать про Саню: бедная девочка пошла в школу. А это означает весь букет: утомление, рассеянное внимание, подавленную инициативу. Быть может, это было не очень ясно из моих записок, но нормальное состояние Сани всегда было — восторженное сияние. Вы можете себе представить ребенка, которому только что, пять минут назад подарили собаку? Вот такова была Саня *в обычное время* и без всякой собаки. А сейчас ее как будто погасили, и взгляд всё чаще уплывает куда-то в сторону, в пространство... Она берет наугад произвольную фигурку; случайно оказывается, что правильную, подходящую в качестве решения; она долго-долго на нее смотрит, явно не в состоянии выделить признаки, отделить их от фигурки и сравнить с предыдущими значениями, и наконец кладет фигурку обратно в общую кучу. Потом берет наугад другую фигурку, и всё повторяется. Потом в какой-то момент эта деятельность ее утомляет, и она кладет в ряд ту фигурку, которую держит в руках, независимо от ее пригодности, а глаза тотчас же куда-то уплывают... Впрочем, иногда я замечал, что и держа в руках фигурку, она смотрит не на нее и не на ряд, а куда-то в пространство.

Я стал задавать ей вопросы: «Эти фигурки по размеру одинаковые? А по цвету? А дырка здесь есть? А здесь?» На все вопросы она отвечала правильно, но обычно не могла сделать из своих ответов какой-нибудь вывод.

Как-то она не могла уловить, сколько же получилось различий и сколько их нужно. А иногда, уже положив решение в ряд, она вдруг замечала, что фигурка чем-то отличается от предыдущей (но ведь она и должна была отличаться одним признаком; однако Саня как-то забывала об этом), и тогда она вдруг как будто «спохватывалась» и поспешно забирала свое решение обратно. Приходилось объяснять ей, что оно было правильным. Иногда мне казалось, но не знаю, прав ли я, что ее сбивали с толку сами наименования признаков. Существуют треугольники, круги и квадраты — это ясно, потому что видно; но еще существует какая-то «форма», и что это значит и как связано с предыдущим, не очень ясно. Треугольник отличается от квадрата — это видно; но кроме этого он, по-видимому, отличается еще и формой — это вторая разница, что ли? Смысл слов «форма» и «размер» она тоже путала. Вот таковы в целом симптомы ее «неуспеваемости». Думаю, что со временем всё войдет в свое русло, но сейчас, на данном занятии, ничего у нас не получалось.

На Жене можно было наблюдать одно своеобразное явление. Когда решали задачу другие, она как бы обладала *мгновенным ви́дением* правильного решения, т. е. решала задачу так же, как и я. При этом она порывалась подсказывать, шептала мне на ухо, что у Сани под носом лежит решение, а она его не видит, вскрикивала, когда из кучи фигурок вдруг вываливалась подходящая и т. д. и т. п. По всему было видно, что она определяет верные и неверные решения с одного взгляда. Но когда очередь переходила к ней самой, она вдруг всё это теряла и начинала действовать, как говорят психологи, «развернуто», т. е. перечисляла по очереди все признаки, смотрела, совпадают они или нет, подсчитывала несовпадения и т. п. При этом она могла забыть рассмотреть какой-нибудь признак или ошибиться в счете (посчитать какой-то признак два раза, или, найдя вторую разницу, забыть о первой) — и тогда возникали ошибки.

Но, пожалуй, еще важнее то, что Женя брала из кучи не сразу правильную фигурку, как могла бы, а произвольную. Она отличалась от самой себя в моменты «без ответственности» так же, как человек, умеющий отличать на слух стихи от прозы, отличается от человека, вынужденного подсчитывать количество ударных и безударных слогов. Второй легко может ошибиться в подсчетах, в то время как первый ошибиться не может, так как «слышит» выпадающую строку.

Пожалуй, это последнее неожиданно родившееся сравнение очень хорошо показывает, что такое *теория поэтапного формирования умственных действий*. Как бы стали авторы этой теории учить нас распознавать стихи? Сначала должны идти «развернутые предметные действия». Например, можно обозначить ударный слог красным квадратиком, а безударный синим, и выкладывать для каждой строчки эти квадратики в ряд на столе, после чего выявлять периодичность. Потом от предметных действий надо переходить к «символическим» — рисовать на бумаге схемы вида $- \wedge - \wedge - \wedge -$, где черточка обозначает безударный слог, а знак $\wedge$ — ударный. Постепенно нужно добиваться того, чтобы эти схемы «интериоризировались», т. е. рисовались лишь мысленно и даже «свернуто» (что означает это слово, не очень ясно), а подсчет числа слогов должен тоже производиться в уме и всё быстрее и быстрее, пока не дойдет до полного автоматизма. А там, глядишь, мы уже и научились отличать стихи от прозы.

В то время как правильный путь состоит в том, чтобы просто читать много стихов, желательно хороших, и особенно желательно их при этом любить.

Всё сказанное насчет стихов — не утрирование. Я видел статью в одном сборнике, где шестиклассников, не умеющих видеть в двумерных рисунках изображения трехмерных предметов, учили это делать, выделяя куски рисунка и разбирая смысл взаимного расположения линий. Например, в изображении вершины куба (рис. 10.10) одна из линий представляет собой вертикаль, другая — горизонталь, параллельную плоскости рисунка, а третья — горизонталь, перпендикулярную этой плоскости.

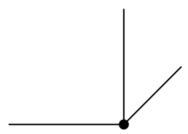


Рис. 10.10. Вершина куба.

И таки научили — вот в чём юмор! Ведь если долго заниматься вышеизложенным квазистиховедением, то поневоле придется прочесть довольно много стихов. А умные дети, которые всё и без того понимали, могут получить даже некоторую пользу от того, что познакомятся с основами формального стиховедения. Это, однако, не отменяет того факта, что теория в целом — сплошной абсурд: дети *так* не учатся.

Но вернемся на наше занятие. Всё-таки Женя ошибалась довольно редко, а иногда в ней просыпалось непосредственное ви́дение, и она решала задачу сходу. Есть еще такой критерий. Большинство решений, которые давали девочки, были тривиальными вот в каком смысле: они меняли лишь цвет предыдущей фигурки. Например, лежит большой красный квадрат без дырки; тогда следом за ним кладется большой синий квадрат без дырки, потом желтый, потом зеленый. Но на этом возможности изменения цвета исчерпываются; дальше нужно поменять какой-то другой, менее тривиальный признак, сохранив остальные. В этот момент обычно возникали трудности. Так во́т, Женя преодолевала этот момент легче остальных, а иногда предлагала нетривиальное решение до того, как в этом возникала необходимость. Дина по количеству нетривиальных решений была на втором месте, а Сане они вообще не удавались. Мне сейчас пришло в голову, что, может быть, цвет легче распознается детьми в качестве признака, потому что выражен в языке прилагательными (красный, синий, желтый, зеленый), в то время как, скажем, форма выражена существительными (треугольник, круг, квадрат). Впрочем, размер (большой — маленький) тоже оказывается менее очевидным признаком, чем цвет.

[Забавно: в другом месте я утверждаю, что дети замечают разницу в цвете в последнюю очередь. Удивительная способность порождать скороспелые теории.]

В самом конце Дине досталась такая ситуация, когда оставалось около десятка фигурок, но ни одна из них не годилась в качестве следующей. Она долго была в тупике.

Есть одно явление, касающееся детей, с которым я никак не могу примириться, хотя и наблюдал его десятки раз (кажется, и писал об этом уже не раз). Казалось бы, ну чего проще: брать фигурки по одной, просматривать, и если не годится, откладывать в сторону. Но опыт показывает, что *никто из детей никогда до этого не догадывается*. Почему — не могу понять. Неужели это так трудно? Они будут долго-долго копаться во всей куче, по многу раз просматривая одни и те же решения, и ситуация будет становиться всё более затяжной и безнадежной. Вот и сейчас было то же. Пришлось мне вмешаться и начать откладывать в сторону уже раз отвергнутые фигурки. В итоге мы убедились, что решений больше нет, и на этом задача кончилась. Правда, Галя предлагала продолжать выкладывать фигурки с другой стороны ряда. Но я чувствовал, что задача слишком затянулась (как и вот это мое описание), и спросил у девочек, будем ли продолжать. Я уже два раза до этого спрашивал, не надоело ли им — они говорили, что нет, но сейчас все единодушно высказались за то, чтобы задачу закончить.

Могу попробовать предложить два объяснения тому, почему дети не убирают в сторону отвергнутые решения, а оставляют их в общей куче. Первое: они не так уж твердо уверены, что всё сделано правильно, без ошибок, и решение наверняка не подходит. Второе: у них еще нет нашей взрослой убежденности в постоянстве законов природы (и логики); быть может, сейчас не подошло, а через пять минут подойдет. Так порой случалось в прошлом, а причины не всегда были стопроцентно ясны.

Задание 3. Укладывание фигурок обратно.

Как и раньше, я назначил девочкам пересекающиеся условия для выбора фигурок: одна кладет только большие, другая — только с дыркой, третья — только желтые. На этот раз все всё понимали. Женя даже сказала про какую-то фигурку, что ее может и она положить, и Саня. Так что споров больше не было. Когда у Жени кончились ее желтые фигурки, я спросил, почему ее фигурки кончились раньше всех. Она сама считала причиной то, что Саня тоже иногда клала желтые фигурки. Я объяснил, что, в то время как больших фигурок и фигурок с дыркой имеется по половине, желтых всего четверть, так как есть четыре цвета. Поэтому мы разрешили Жене укладывать дальше красные фигурки. В конце, как всегда, остались фигурки ни для кого не годные — дополнения всех трех классов. Их мы положили уже без разбора.

Хочу напомнить, что при укладывании фигурок в коробку имеется еще одно дополнительное требование — фигурки с дырками и без дырок должны оказываться в разных ячейках.

Вообще вся работа шла легко и оживленно: «Ой, Женя, смотри, у тебя всего две осталось!» И тому подобное.

Геометрия для малышей.

У меня еще оставалось две или три неиспользованные задачи, но уже прошло 45 минут, и поэтому я их оставил, и мы последние 5 минут читали «Геометрию для малышей».

*   *   *

Вот так — без фанфар и празднеств — закончился наш второй кружок; все усилия по его продолжению оказались тщетны. Жизнь понеслась дальше, и я сумел «остановиться и оглянуться» только сейчас, в 2005 году.

Это не эпилог

Наверное, читателям будет любопытно узнать, что стало дальше с героями моего рассказа. Я долго колебался, должен ли я удовлетворять это любопытство. Ведь жизнь продолжается, и то, что верно сегодня, может кардинально измениться завтра. Потом всё-таки решил написать.

Я уже многократно извинялся за то, что уделяю Диме с Женей больше внимания, чем остальным. На этот раз ситуация еще более усугубляется: о своих детях я мог бы написать как минимум главу, а то и больше; о чужих же знаю порой лишь мельком и понаслышке. Надеюсь, что меня простят и поймут.

Из компании мальчиков один только Дима выбрал математику своей профессией. Он окончил Высшую нормальную школу в Париже (École Normale Supérieure), защитил диссертацию и получил место исследователя в одном из Парижских университетов. В самом начале этой книги, во введении, я упоминал о «Московском центре непрерывного математического образования» (том самом, где выходит эта книга) и о Независимом Московском университете. Так во́т, в течение нескольких лет Дима был ответственным (с французской стороны) за обмен студентов между École Normale и Независимым университетом. Он также много занимается со школьниками; в частности, организовал в Париже Турнир городов: это международная математическая олимпиада, центральный оргкомитет которой расположен в Москве, всё в том же МЦНМО. Еще одна сторона его жизни — он является одним из руководителей Парижского клуба русской авторской песни; сам тоже поет песни под гитару.

Петя закончил Институт восточных языков МГУ по специальности «японский язык»; год провел в Японии; работает переводчиком. Является одним из организаторов и руководителей приходского подросткового клуба; выпускает молодежный журнал.

Андрюша окончил Государственную финансовую академию по специальности «мировая экономика». Работает в московском отделении одного из крупнейших западных банков: занимается торговлей так называемыми «финансовыми инструментами» — ценными бумагами, валютами, производными контрактами и т. п. У него уже маленькая дочь.

К сожалению, я полностью потерял из виду мальчика Женю; не знаю, где он сейчас и чем нынче занимается.

Моя дочь Женя окончила один из Парижских университетов по отделению киноведения и сейчас продолжает учебу там же в аспирантуре; ее диссертация посвящена Кире Муратовой. Помимо этого, Женя преподает киноведение студентам и учителям лицеев, переводит, делает субтитры к фильмам, участвует в организации кинофестивалей; была членом молодежного жюри на Каннском фестивале; сняла несколько короткометражек; представляла современное французское кино в России, Казахстане и Киргизии; танцует в полупрофессиональной труппе свинга... не знаю, где остановиться...

Саня окончила историко-филологический факультет РГГУ; как и ее брат Петя, много занимается с детьми при церкви, только церковь на этот раз иная, не православная, а протестантская. В данный момент работает над открытием частной школы.

Дина живет в Америке; окончила математический факультет университета Брандайс и работает преподавателем математики. Редактирует учебники по математике. Всерьез занимается керамикой: она участвовала в нескольких выставках.

* * *

Какой бы такой придумать эффектный конец?

Я знаю, что точка катарсиса должна отстоять примерно на одну треть от конца, а дальше напряжение должно понемногу спадать. А у меня всё идет в одинаковом ритме от начала и до конца. По стилю немножко напоминает сагу (хотя это сравнение, разумеется, неуместно льстивое). Когда-то я был потрясен и очарован, впервые познакомившись с исландскими сагами; они и сейчас остаются моим любимейшим чтением. Жизнь в них кипит, одни события нагромождаются на другие, и вдруг... — одна короткая фраза:

«Здесь кончается эта сага».

Мысль не притворяется движущейся, она дает не указание пути, а образец поступи. Хорошо, когда читатель дочитывает книгу с безошибочным ощущением, что теперь он не знает больше, чем не знал раньше.

С. Аверинцев.

Цитируется в статье М. Гаспарова «Памяти Сергея Аверинцева» // Новый Мир. № 6. 2004.